

DOI: 10.3724/SP.J.1218.2013.00156

一种基于指数积的串联机器人标定方法

高文斌^{1,2}, 王洪光¹, 姜勇¹

(1. 中国科学院沈阳自动化研究所机器人学国家重点实验室, 辽宁 沈阳 110016; 2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 给出了一种基于指数积公式的串联机器人运动学参数标定方法. 根据关节旋量坐标的理论值和实际值之间的伴随变换关系将指数积公式改写成包含有关节约束条件的等价形式. 对运动学方程取微分得到末端执行器误差与关节旋量误差及零位旋量误差间的线性化模型. 给出一种基于最小二乘法的串联机器人运动学参数标定模型, 并通过伴随变换的方法实现运动学参数识别过程中关节旋量坐标的更新. 一种 6 自由度串联机器人的标定仿真实验表明参数标定过程能够快速地收敛到稳定值, 标定结果能有效地补偿末端执行器的位姿误差.

关键词: 串联机器人; 指数积; 参数标定

中图分类号: TP24

文献标识码: A

文章编号: 1002-0446(2013)-02-0156-06

A Calibration Method for Serial Robots Based on POE Formula

GAO Wenbin^{1,2}, WANG Hongguang¹, JIANG Yong¹

(1. State Key Laboratory of Robotics, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: A kinematics parameter calibration method for serial robots based on the product of exponential (POE) formula is presented. According to the adjoint transformation between the theoretical value and actual value of joint twists, the POE formula is transformed into an equivalent form including the joint constraints. A linearized model describing the relationship between the errors in the end-effector and the errors in the joint twists and in the zero position twist, is obtained by differentiating the kinematics equation. A least-squares kinematics calibration model for serial robots is given and the joint twists are updated through the adjoint transformation in the kinematic parameters identification procedure. A calibration simulation experiment with a 6-DOF (degree of freedom) serial robot shows that the calibration process can quickly converge to the stable values and the calibration result can compensate for the pose errors in the end-effector effectively.

Keywords: serial robot; POE (product of exponential); parameter calibration

1 前言 (Introduction)

目前, 在虚拟环境中实现离线编程已成为机器人应用技术的一个发展趋势. 机器人的实际运动学模型和仿真环境中使用的理论模型间的偏差将导致机器人产生较大的定位误差. 精确的运动学模型是实现离线编程的基础, 参数标定是获得准确运动学模型的一种经济有效的方法^[1-3].

机器人运动学参数的标定研究大多基于 D-H 参数法, 原因是这种方法需要的参数量最少. D-H 参数法的主要不足之处是当相邻关节的轴线接近平行时, 机器人会出现奇异性问题. 一些学者采用增加参数的方法来解决奇异性问题, 带来了模型建立过程不直接、形式复杂、缺少通用性等新问题^[4-5]. 为了克服 D-H 参数法的不足, Park^[6] 首先提出了基

于指数积公式的运动学参数标定方法, 原因有: (1) 指数积模型实现了转动关节和移动关节的统一描述, 具有通用性的优点; (2) 当相邻关节轴线接近平行时, 运动学模型相对关节运动是光滑变化的, 不会出现奇异性问题^[7-8]. Park 给出的标定模型中包含有限积分项, 使用过程中并不方便. He^[9] 对 Park 的模型进行了改进, 给出了一种显式的标定模型.

文 [9] 给出的基于指数积公式的标定方法需在迭代计算过程中的每一步进行一次正交化处理, 以保证关节旋量坐标更新后仍满足关节约束条件的要求. 正交化处理过程将导致关节旋量坐标中实际更新的误差量不能严格地符合线性化方程对参数误差的识别结果, 不但降低了标定结果的精度, 甚至会影响标定过程的稳定性. 为避免正交化处理过程,

基金项目: 国家 863 计划资助项目 (2007AA041703); 国家自然科学基金资助项目 (60905048); 机器人学国家重点实验室自主课题 (RLZ200802).
通讯作者: 高文斌, gaowenbin@sia.cn 收稿/录用/修回: 2012-07-03/2012-11-15/2012-11-27

基于指数积公式, 本文给出了一种包含关节约束条件的显式形式的串联机器人运动学参数标定模型.

2 运动学模型变换 (Kinematics model transformation)

2.1 误差分析

n 自由度串联机器人的运动学模型的指数积公式为 [7]

$$f(\boldsymbol{\theta}) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} f_{st}(0) \quad (1)$$

式中, $\boldsymbol{\theta}$ 为关节变量向量, $\hat{\xi}_i$ 为 i 号关节旋量, θ_i 为 i 号关节变量, $f_{st}(0)$ 为各关节处于零位时末端执行器坐标系相对于基础坐标系的位姿矩阵. $f_{st}(0)$ 可以写成某个常旋量 $\hat{\Gamma} \in \mathfrak{se}(3)$ 的指数形式. 式 (1) 可以改写成

$$f(\boldsymbol{\theta}) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} e^{\hat{\Gamma}} \quad (2)$$

机器人的误差模型可以通过对运动学方程取微分的方式获得 [6]

$$\delta f f^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\Psi}} \delta \boldsymbol{\Psi} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \delta \boldsymbol{\Gamma} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}} \delta \boldsymbol{\theta} \right) f^{-1} \quad (3)$$

式中, $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\xi}_1 \quad \boldsymbol{\xi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\xi}_n] \in \mathbb{R}^{6 \times n}$, $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^6$.

由式 (3) 可知机器人的参数误差与旋量坐标误差 ($\delta \boldsymbol{\xi}_i, \delta \boldsymbol{\Gamma}$) 及关节的零位偏置误差 ($\delta \boldsymbol{\theta}$) 相对应. 文 [10] 指出关节的零位偏置误差可以归结为旋量误差, 不必单独识别. 本节对这一结论给出了更为合理的解释. 假设模型中只有旋量误差, 旋量坐标的实际值为 ($\boldsymbol{\xi}_i^a, \boldsymbol{\Gamma}^a$), 此时运动学模型为

$$f^a(\boldsymbol{\theta}) = e^{\hat{\xi}_1^a \theta_1} e^{\hat{\xi}_2^a \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n^a \theta_n} e^{\hat{\Gamma}^a} \quad (4)$$

实际运动学模型中关节零位偏置误差是存在的, 设为 $\delta \boldsymbol{\theta}$. 代入式 (4) 可得运动学模型

$$\begin{aligned} f^a(\boldsymbol{\theta}) &= e^{\hat{\xi}_1^a (\theta_1 + \delta \theta_1)} e^{\hat{\xi}_2^a (\theta_2 + \delta \theta_2)} \dots e^{\hat{\xi}_n^a (\theta_n + \delta \theta_n)} e^{\hat{\Gamma}^a} \\ &= e^{\hat{\xi}_1^a \theta_1} e^{\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} e^{\hat{\xi}_2^a \theta_2} \left(e^{-\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} e^{\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} \right) e^{\hat{\xi}_2^a \delta \theta_2} \dots \\ &\quad e^{\hat{\xi}_n^a \theta_n} \left(e^{-\hat{\xi}_{n-1}^a \delta \theta_{n-1}} \dots e^{-\hat{\xi}_2^a \delta \theta_2} e^{-\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} e^{\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} e^{\hat{\xi}_2^a \delta \theta_2} \dots \right. \\ &\quad \left. e^{\hat{\xi}_{n-1}^a \delta \theta_{n-1}} \right) e^{\hat{\xi}_n^a \delta \theta_n} e^{\hat{\Gamma}^a} \\ &= e^{\hat{\xi}_1^a \theta_1} \left(e^{\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} e^{\hat{\xi}_2^a \theta_2} e^{-\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} \right) \dots \left(e^{\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} e^{\hat{\xi}_2^a \delta \theta_2} \dots \right. \\ &\quad \left. e^{\hat{\xi}_{n-1}^a \delta \theta_{n-1}} e^{\hat{\xi}_n^a \theta_n} e^{-\hat{\xi}_{n-1}^a \delta \theta_{n-1}} \dots e^{-\hat{\xi}_2^a \delta \theta_2} e^{-\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} \right) \\ &\quad \left(e^{\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} e^{\hat{\xi}_2^a \delta \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n^a \delta \theta_n} e^{\hat{\Gamma}^a} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

根据恒等式 $e^{\hat{\xi} \theta} = g e^{\hat{\xi}' \theta} g^{-1} = e^{g(\hat{\xi}' \theta)g^{-1}}$ [7], 式 (5) 可以改写为

$$f^a(\boldsymbol{\theta}) = e^{\hat{\xi}_1^a \theta_1} e^{\hat{\xi}_2^a \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n^a \theta_n} e^{\hat{\Gamma}^a} \quad (6)$$

式中,

$$\begin{aligned} e^{\hat{\xi}_1^a \theta_1} &= e^{\hat{\xi}_1^a \theta_1} \\ e^{\hat{\xi}_2^a \theta_2} &= e^{\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} e^{\hat{\xi}_2^a \theta_2} e^{-\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} = e^{e^{\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} (\hat{\xi}_2^a \theta_2) e^{-\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1}} \\ &\quad \vdots \\ e^{\hat{\xi}_n^a \theta_n} &= e^{\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} e^{\hat{\xi}_2^a \delta \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_{n-1}^a \delta \theta_{n-1}} e^{\hat{\xi}_n^a \theta_n} e^{-\hat{\xi}_{n-1}^a \delta \theta_{n-1}} \dots \\ &\quad e^{-\hat{\xi}_2^a \delta \theta_2} e^{-\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} \\ &= e^{e^{\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} e^{\hat{\xi}_2^a \delta \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_{n-1}^a \delta \theta_{n-1}} (\hat{\xi}_n^a \theta_n) e^{-\hat{\xi}_{n-1}^a \delta \theta_{n-1}} e^{-\hat{\xi}_2^a \delta \theta_2} e^{-\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1}} \\ e^{\hat{\Gamma}^a} &= \left(e^{\hat{\xi}_1^a \delta \theta_1} e^{\hat{\xi}_2^a \delta \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n^a \delta \theta_n} \right) e^{\hat{\Gamma}^a} \end{aligned}$$

由式 (6) 可知, 关节的零位偏置误差可以看作是旋量误差的一个误差源, 在运动学参数的标定过程中仅需识别和补偿旋量误差, 式 (3) 可以简化为

$$\delta f f^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\Psi}} \delta \boldsymbol{\Psi} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \delta \boldsymbol{\Gamma} \right) f^{-1} \quad (7)$$

2.2 模型变换

关节旋量坐标 $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\omega}^T \quad \boldsymbol{v}^T]^T$ 的理论值和实际值都应满足相应的关节约束条件 [10].

转动关节旋量坐标的理论值 $\boldsymbol{\xi}^n$ 和实际值 $\boldsymbol{\xi}^a$ 之间的关系可用某个刚体变换 $e^{\hat{\boldsymbol{\eta}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵表示

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^a &= \text{Ad} \left(e^{\hat{\boldsymbol{\eta}}} \right) \boldsymbol{\xi}^n \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & 0 \\ \hat{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^n \\ \boldsymbol{v}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \boldsymbol{\omega}^n \\ \hat{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{\omega}^n + \boldsymbol{R} \boldsymbol{v}^n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

转动关节应满足的关节约束条件为

$$\|\boldsymbol{\omega}\| = 1, \quad \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{v} = 0 \quad (9)$$

易知, 转动关节的旋量坐标经伴随变换之后仍满足关节约束条件要求, 即

$$\|\boldsymbol{\omega}^a\| = \|\boldsymbol{R} \boldsymbol{\omega}^n\| = \|\boldsymbol{\omega}^n\| = 1 \quad (10)$$

$$(\boldsymbol{\omega}^a)^T \boldsymbol{v}^a = (\boldsymbol{R} \boldsymbol{\omega}^n)^T (\hat{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{\omega}^n + \boldsymbol{R} \boldsymbol{v}^n) = 0 \quad (11)$$

移动关节旋量坐标的理论值 $\boldsymbol{\xi}^n$ 和实际值 $\boldsymbol{\xi}^a$ 之间的关系也可用某个刚体变换 $e^{\hat{\boldsymbol{\eta}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵表示

$$\begin{aligned} \xi^a &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}^a \end{bmatrix} = \text{Ad} \left(e^{\hat{\eta}} \right) \xi^n \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ \hat{\rho}\mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R}\mathbf{v}^n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

移动关节的旋量坐标 $\xi = [0 \quad \mathbf{v}^T]^T$ 应满足的约束条件为

$$\|\mathbf{v}\| = 1 \quad (13)$$

易知, 移动关节的旋量坐标经过伴随变换之后仍满足关节约束条件要求, 即

$$\|\mathbf{v}^a\| = \|\mathbf{R}\mathbf{v}^n\| = \|\mathbf{v}^n\| = 1 \quad (14)$$

由式 (8)、(12) 可知, 运动学方程 (6) 可写成理论关节旋量的伴随变换形式

$$f^a(\boldsymbol{\theta}) = e^{e^{\hat{\eta}_1} \xi_1^n e^{-\hat{\eta}_1}} e^{e^{\hat{\eta}_2} \xi_2^n e^{-\hat{\eta}_2}} \dots e^{e^{\hat{\eta}_n} \xi_n^n e^{-\hat{\eta}_n}} e^{\hat{r}^a} \quad (15)$$

3 标定模型 (Calibration model)

3.1 运动学模型线性化

将运动学方程 (15) 代入方程 (7), 化简可得

$$\begin{aligned} & (\delta f \cdot f^{-1})^\vee \\ &= \left(\delta \left(e^{e^{\hat{\eta}_1} \xi_1^n e^{-\hat{\eta}_1}} e^{e^{\hat{\eta}_2} \xi_2^n e^{-\hat{\eta}_2}} \dots e^{e^{\hat{\eta}_n} \xi_n^n e^{-\hat{\eta}_n}} e^{\hat{r}^a} \right) \right. \\ & \quad \left. \left(e^{e^{\hat{\eta}_1} \xi_1^n e^{-\hat{\eta}_1}} e^{e^{\hat{\eta}_2} \xi_2^n e^{-\hat{\eta}_2}} \dots e^{e^{\hat{\eta}_n} \xi_n^n e^{-\hat{\eta}_n}} e^{\hat{r}^a} \right)^{-1} \right)^\vee \\ &= \left(\delta \left(e^{\hat{\eta}_1} e^{\xi_1^n} e^{-\hat{\eta}_1} e^{\hat{\eta}_2} e^{\xi_2^n} e^{-\hat{\eta}_2} \dots e^{\hat{\eta}_n} e^{\xi_n^n} e^{-\hat{\eta}_n} e^{\hat{r}^a} \right) \right. \\ & \quad \left. \left(e^{-\hat{r}^a} e^{-\hat{\eta}_n} e^{-\xi_n^n} e^{-\hat{\eta}_n} \dots e^{-\hat{\eta}_2} e^{-\xi_2^n} e^{-\hat{\eta}_2} e^{-\hat{\eta}_1} e^{-\xi_1^n} e^{-\hat{\eta}_1} \right) \right)^\vee \\ &= \left(\delta \left(e^{\hat{\eta}_1} e^{\xi_1^n} e^{-\hat{\eta}_1} \right) \left(e^{\hat{\eta}_1} e^{-\xi_1^n} e^{-\hat{\eta}_1} \right) \right)^\vee + \\ & \quad \text{Ad} \left(e^{\hat{\eta}_1} e^{\xi_1^n} e^{-\hat{\eta}_1} \right) \left(\delta \left(e^{\hat{\eta}_2} e^{\xi_2^n} e^{-\hat{\eta}_2} \right) \right. \\ & \quad \left. \left(e^{\hat{\eta}_2} e^{-\xi_2^n} e^{-\hat{\eta}_2} \right) \right)^\vee + \dots + \text{Ad} \left(\prod_{i=1}^{n-1} e^{\hat{\eta}_i} e^{\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right) \cdot \\ & \quad \left(\delta \left(e^{\hat{\eta}_n} e^{\xi_n^n} e^{-\hat{\eta}_n} \right) \left(e^{\hat{\eta}_n} e^{-\xi_n^n} e^{-\hat{\eta}_n} \right) \right)^\vee + \\ & \quad \text{Ad} \left(\prod_{i=1}^n e^{\hat{\eta}_i} e^{\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right) \left(\left(\delta e^{\hat{r}^a} \right) e^{-\hat{r}^a} \right)^\vee \end{aligned} \quad (16)$$

由恒等式 $\delta(e^{\hat{\eta}})e^{-\hat{\eta}} + e^{\hat{\eta}}\delta(e^{-\hat{\eta}}) = 0$, 可得

$$\begin{aligned} & \left(\delta \left(e^{\hat{\eta}_i} e^{\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right) \left(e^{\hat{\eta}_i} e^{-\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right) \right)^\vee \\ &= \left(\left(\delta e^{\hat{\eta}_i} \right) e^{\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} e^{\hat{\eta}_i} e^{-\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right)^\vee + \\ & \quad \left(e^{\hat{\eta}_i} e^{\xi_i^n} \left(\delta e^{-\hat{\eta}_i} \right) e^{\hat{\eta}_i} e^{-\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right)^\vee \\ &= \left(\delta e^{\hat{\eta}_i} e^{-\hat{\eta}_i} \right)^\vee + \left(e^{\hat{\eta}_i} e^{\xi_i^n} \left(e^{-\hat{\eta}_i} e^{\hat{\eta}_i} \right) \left(\delta e^{-\hat{\eta}_i} \right) \right. \\ & \quad \left. e^{\hat{\eta}_i} e^{-\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right)^\vee \\ &= \left(\delta e^{\hat{\eta}_i} e^{-\hat{\eta}_i} \right)^\vee - \text{Ad} \left(e^{\hat{\eta}_i} e^{\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right) \left(\delta e^{\hat{\eta}_i} e^{-\hat{\eta}_i} \right)^\vee \\ &= \left(\mathbf{I} - \text{Ad} \left(e^{\hat{\eta}_i} e^{\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right) \right) \left(\delta e^{\hat{\eta}_i} e^{-\hat{\eta}_i} \right)^\vee \end{aligned} \quad (17)$$

利用式 (17) 可将式 (16) 化简为

$$\begin{aligned} & (\delta f \cdot f^{-1})^\vee \\ &= \left(\mathbf{I} - \text{Ad} \left(e^{\hat{\eta}_1} e^{\xi_1^n} e^{-\hat{\eta}_1} \right) \right) \left(\delta e^{\hat{\eta}_1} e^{-\hat{\eta}_1} \right)^\vee + \\ & \quad \text{Ad} \left(e^{\hat{\eta}_1} e^{\xi_1^n} e^{-\hat{\eta}_1} \right) \left(\mathbf{I} - \text{Ad} \left(e^{\hat{\eta}_2} e^{\xi_2^n} e^{-\hat{\eta}_2} \right) \right) \cdot \\ & \quad \left(\delta e^{\hat{\eta}_2} e^{-\hat{\eta}_2} \right)^\vee + \dots + \text{Ad} \left(\prod_{i=1}^{n-1} e^{\hat{\eta}_i} e^{\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right) \cdot \\ & \quad \left(\mathbf{I} - \text{Ad} \left(e^{\hat{\eta}_n} e^{\xi_n^n} e^{-\hat{\eta}_n} \right) \right) \left(\delta e^{\hat{\eta}_n} e^{-\hat{\eta}_n} \right)^\vee + \\ & \quad \text{Ad} \left(\prod_{i=1}^n e^{\hat{\eta}_i} e^{\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right) \left(\left(\delta e^{\hat{r}^a} \right) e^{-\hat{r}^a} \right)^\vee \end{aligned} \quad (18)$$

式 (18) 中 $(\delta(e^{\hat{\eta}_i})e^{-\hat{\eta}_i})^\vee$ 的显式表达式为^[9,11]

$$\begin{aligned} & \left(\delta \left(e^{\hat{\eta}_i} \right) e^{-\hat{\eta}_i} \right)^\vee \\ &= \left(\mathbf{I}_6 + \frac{4 - a_i \sin a_i - 4 \cos a_i}{2a_i^2} \boldsymbol{\Omega}_i + \right. \\ & \quad \frac{4a_i - 5 \sin a_i + a_i \cos a_i}{2a_i^3} \boldsymbol{\Omega}_i^2 + \\ & \quad \frac{2 - a_i \sin a_i - 2 \cos a_i}{2a_i^4} \boldsymbol{\Omega}_i^3 + \\ & \quad \left. \frac{2a_i - 3 \sin a_i + a_i \cos a_i}{2a_i^5} \boldsymbol{\Omega}_i^4 \right) \delta \boldsymbol{\eta}_i \\ &= K_i \delta \boldsymbol{\eta}_i \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $a_i = \|\boldsymbol{\omega}_i\| = (\omega_{1i}^2 + \omega_{2i}^2 + \omega_{3i}^2)^{1/2}$, $\boldsymbol{\eta}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}}_i & 0 \\ \hat{\mathbf{v}}_i & \hat{\boldsymbol{\omega}}_i \end{bmatrix}.$$

式 (18) 中 $\left(\left(\delta e^{\hat{r}^a} \right) e^{-\hat{r}^a} \right)^\vee$ 的显式形式与式 (19) 相同, 即

$$\left(\left(\delta e^{\hat{r}^a} \right) e^{-\hat{r}^a} \right)^\vee = K_{st} \delta \boldsymbol{\Gamma} \quad (20)$$

将式 (19)、(20) 代入式 (18) 可得运动学方程线性化模型的显式表达式

$$\begin{aligned} & (\delta f \cdot f^{-1})^\vee \\ &= \left(\mathbf{I} - \text{Ad} \left(e^{\hat{\eta}_1} e^{\xi_1^n} e^{-\hat{\eta}_1} \right) \right) K_1 \delta \boldsymbol{\eta}_1 + \text{Ad} \left(e^{\hat{\eta}_1} e^{\xi_1^n} e^{-\hat{\eta}_1} \right) \cdot \\ & \quad \left(\mathbf{I} - \text{Ad} \left(e^{\hat{\eta}_2} e^{\xi_2^n} e^{-\hat{\eta}_2} \right) \right) K_2 \delta \boldsymbol{\eta}_2 + \dots + \\ & \quad \text{Ad} \left(\prod_{i=1}^{n-1} e^{\hat{\eta}_i} e^{\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right) \left(\mathbf{I} - \text{Ad} \left(e^{\hat{\eta}_n} e^{\xi_n^n} e^{-\hat{\eta}_n} \right) \right) \cdot \\ & \quad K_n \delta \boldsymbol{\eta}_n + \text{Ad} \left(\prod_{i=1}^n e^{\hat{\eta}_i} e^{\xi_i^n} e^{-\hat{\eta}_i} \right) K_{st} \delta \boldsymbol{\Gamma} \end{aligned} \quad (21)$$

$\delta f f^{-1}$ 为末端执行器坐标系相对于基础坐标系的空间速度. 当执行器的实际位姿 f^a 和名义位姿 f^n 非常接近时, 有

$$\delta f f^{-1} = (f^a - f^n) (f^n)^{-1} = f^a (f^n)^{-1} - \mathbf{I}_4 \quad (22)$$

3.2 参数标定模型

线性化方程 (22) 可以写成如下矩阵形式

$$y = Hx \quad (23)$$

式中,

$$y = (\delta f \cdot f^{-1})^\vee \in \mathbb{R}^6 \quad (24)$$

$$x = [\delta \eta_1^T, \delta \eta_2^T, \dots, \delta \eta_n^T, \delta \Gamma^T]^T \in \mathbb{R}^{6(n+1)} \quad (25)$$

$$H = [J_1, J_2, \dots, J_n, J_{n+1}] \in \mathbb{R}^{6 \times 6(n+1)} \quad (26)$$

H 的各列如下

$$J_i = \begin{cases} (I - \text{Ad}(e^{\hat{\eta}_1} e^{\hat{\xi}_1^n \theta_1} e^{-\hat{\eta}_1})) K_1, & i = 1 \\ \text{Ad}\left(\prod_{k=1}^{i-1} (e^{\hat{\eta}_k} e^{\hat{\xi}_k^n \theta_k} e^{-\hat{\eta}_k})\right) \cdot \\ (I - \text{Ad}(e^{\hat{\eta}_i} e^{\hat{\xi}_i^n \theta_i} e^{-\hat{\eta}_i})) K_i, & 1 < i \leq n \\ \text{Ad}\left(\prod_{k=1}^{i-1} (e^{\hat{\eta}_k} e^{\hat{\xi}_k^n \theta_k} e^{-\hat{\eta}_k})\right) K_{st}, & i = n + 1 \end{cases}$$

控制机械臂运动到工作空间中 k 个标定位姿. 得到 k 组式 (23) 所示误差方程, 联立各方程可得标定方程

$$Y = Lx \quad (27)$$

$$\text{式中, } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_k \end{bmatrix}.$$

x 可通过最小二乘法求解获得,

$$x = (L^T L)^{-1} L^T Y \quad (28)$$

3.3 标定流程

运动学参数标定识别流程如图 1 所示. 控制机械臂运动到一系列标定位姿, 计算末端执行器位姿的名义值并记录对应的各关节变量值. 通过测量设备获得末端执行器位姿的实际值. 标定模型中误差量 $\delta \eta_i$ 和 $\delta \Gamma$ 可通过最小二乘法 (式 (28)) 获得. 在参数的迭代识别过程中, 从 $k-1$ 步到 k 步的关节旋量坐标和零位旋量坐标的更新方法如式 (29)、(30) 所示:

$$\xi_{i,k} = \text{Ad}(e^{\delta \hat{\eta}_{i,k-1}}) \xi_{i,k-1} \quad (29)$$

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} + \delta \Gamma_{k-1} \quad (30)$$

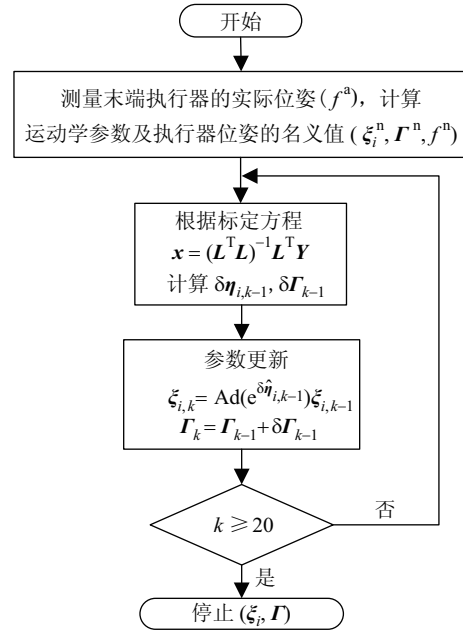


图 1 参数迭代识别过程

Fig.1 Iterative procedure for parameters identification

4 仿真实验 (Simulation)

通过对一种 6 自由度 PUMA 560 机器人的标定仿真实验来验证标定方法的有效性. 机器人各关节处于零位时的构型如图 2 所示, 连杆参数见表 1. 根据指数积公式可得各个关节旋量和零位旋量的名义值, 如表 2 所示.

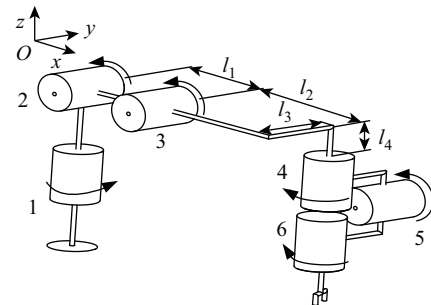


图 2 PUMA 560 型 6 自由度机械臂

Fig.2 A 6-DOF PUMA 560 manipulator

表 1 PUMA 560 连杆参数

Tab.1 Link parameters of PUMA 560

连杆	l_1	l_2	l_3	l_4
长度/mm	150	100	50	20

随机产生 50 组关节变量. 根据表 2 所示旋量坐标的“名义值”和“实际值”, 通过式 (6) 计算末端执行器的名义位姿和实际位姿. 将计算得到的实际位姿作为仿真计算中执行器位姿的“测量值”. 为了验证标定算法的稳定性, 对执行器位姿的“测量值”的位置量和姿态量分别施加范围为: $[-0.05 \text{ mm},$

0.05 mm] 和 [-0.001 rad, 0.001 rad] 的均匀分布噪声, 来模拟测量误差. 按照图 1 所示标定流程, 完成旋量坐标的迭代识别. 如图 3 所示, 在测量噪声的干扰下运动学参数迭代标定过程可以快速地收敛到稳定值, 旋量坐标的“识别结果”如表 2 所示.

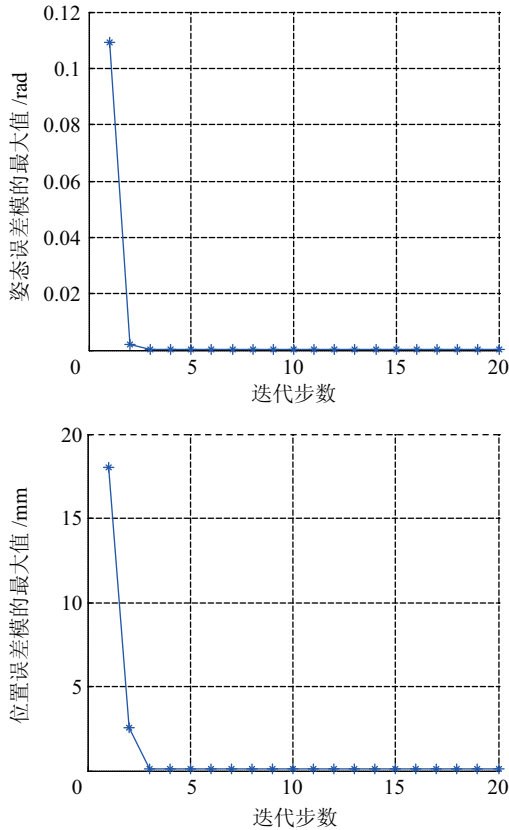


图 3 迭代过程中末端执行器误差值

Fig.3 Errors of the end-effector in the iterative procedure

在机械臂的关节空间内随机产生 50 组测试点, 根据表 2 所示旋量坐标的“名义值”、“实际值”和“识别结果”, 利用式 (6) 分别计算末端执行器位姿的“理论值”、“实际值”、“补偿值”. 分别计算测试位置上末端执行器位置量和姿态量的“理论值”和“补偿值”与“实际值”间误差向量的模. 如图 4 所示, 在随机产生的测试点上末端执行器的姿态误差和位置误差都得到了明显的降低. 可知在机械臂参数误差和测量噪声均较大时, 标定结果仍能有效地补偿末端执行器的位姿误差.

5 结论 (Conclusion)

基于包含有关节约束条件的指数积公式的等价形式, 给出了一种新型的串联机器人运动学参数标定模型. 模型为显式表达式形式, 结构清晰, 使用方便, 避免了基于 D-H 参数法的标定模型缺少通用性的不足, 具有更好的数学一致性, 可以应用于任何拓扑结构形式的串联机器人的标定. 标定

表 2 旋量坐标值

Tab.2 Twist coordinate values

关节旋量	名义值	实际值	识别结果
ξ_1	0	0.0050	0.0050
	0	0.0020	0.0020
	1	1.0000	1.0000
	0	0.0292	0.0278
	0	0.0169	0.0129
	0	-0.0002	-0.0002
ξ_2	0	-0.0189	-0.0189
	-1	-0.9998	-0.9998
	0	-0.0049	-0.0048
	0	0.0205	0.0199
	0	-0.0005	-0.0004
	0	0.0165	0.0072
ξ_3	0	0.0286	0.0286
	-1	-0.9996	-0.9996
	1	0.0015	0.0015
	0	0.1559	0.1532
	0	-0.1485	-0.1484
	-100	-100.1249	-100.1367
ξ_4	0	0.0243	0.0243
	0	-0.0009	-0.0010
	-1	-0.9997	-0.9997
	-50	-57.3451	-57.3363
	250	248.3065	248.3092
	0	-1.6270	-1.6310
ξ_5	0	0.0027	0.0026
	-1	-0.9999	-0.9999
	1	0.0158	0.0158
	-20	-16.1706	-16.1843
	0	-4.0015	-4.0040
	-250	-250.1718	-250.1717
ξ_6	0	0.0108	0.0108
	0	0.0131	0.0130
	-1	-0.9999	-0.9999
	-50	-52.3448	-52.3338
	250	249.4292	249.4277
	0	2.6900	2.6880
Γ	0	0.0200	0.0200
	0	-0.0100	-0.0100
	0	0.0100	0.0100
	250	249.0000	248.9937
	50	51.0000	50.9964
	-20	-20.6000	-20.6129

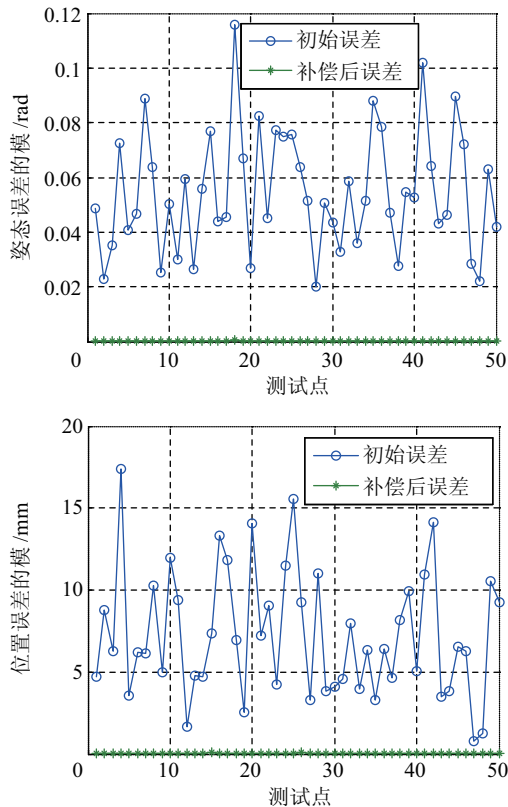


图4 末端执行器误差

Fig.4 Errors of the end-effector

模型中包含了关节约束条件: 对于转动关节满足 $\|\boldsymbol{\omega}\| = 1$, $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{v} = 0$, 对于移动关节满足 $\|\mathbf{v}\| = 1$, 在参数的迭代标定过程中关节旋量坐标通过伴随变换的方式实现更新, 避免了为满足关节约束条件要求在迭代计算中的每一步都对关节旋量坐标的更新值进行归一化处理的不足. 该模型能够保证标定过程中每步获得的关节旋量坐标更新值都严格地符合线性化方程, 提高了标定过程的稳定性和标定结果的准确性. 最后, 通过一种 6 自由度 PUMA 机械臂的标定仿真实验验证了运动学参数标定方法的有效性和稳定性.

参考文献 (References)

- [1] Dolinsky J U, Jenkinson I D, Colquhoun G J. Application of genetic programming to the calibration of industrial robots[J]. Computers in Industry, 2007, 58(3): 255-264.
- [2] Chen H P, Fuhlbrige T, Choi S, et al. Practical industrial robot zero offset calibration[C]//IEEE Conference on Automation Science and Engineering. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2008: 516-521.
- [3] Mustafa S K, Tao P Y, Yang G L, et al. A geometrical approach for online error compensation of industrial manipulators[C]//IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010: 738-743.
- [4] Veitschegger W K, Wu C H. Robot accuracy analysis based on kinematics[J]. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1986, 2(3): 171-179.
- [5] Zhuang H Q, Roth Z S, Hamano F. A complete and parametrically continuous kinematic model for robot manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1992, 8(4): 451-463.
- [6] Okamura K, Park F C. Kinematic calibration using the product of exponentials formula[J]. Robotica, 1996, 14(4): 415-421.
- [7] Park F C. Computational aspects of the product-of-exponentials formula for robot kinematics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, 39(3): 643-647.
- [8] Chen I M, Yang G L, Tan C T, et al. Local POE model for robot kinematic calibration[J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(11/12): 1215-1239.
- [9] He R B, Zhao Y J, Yang S N. Kinematic-parameter identification for serial-robot calibration based on POE formula[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2010, 26(3): 411-423.
- [10] Lou Y J, Chen T N, Wu Y Q, et al. Improved and modified geometric formulation of POE based kinematic calibration of serial robots[C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2009: 5261-5266.
- [11] Selig J M. Geometric fundamentals of robotics[M]. 2nd ed. New York, USA: Springer-Verlag, 2004.

作者简介:

高文斌 (1983-), 男, 博士生. 研究领域: 机器人机构学.
王洪光 (1965-), 男, 博士, 研究员. 研究领域: 机器人机构学, 特种机器人及机电一体化技术.