

研究论文

从区间模型预测控制到双层结构 模型预测控制

邹涛¹, 王丁丁², 潘昊¹, 苑明哲¹, 季忠宛³

(¹ 中国科学院沈阳自动化研究所, 辽宁 沈阳 110016; ² 浙江工业大学信息工程学院, 浙江 杭州 310023;
³ 丽水学院, 浙江 丽水 323000)

摘要: 模型预测控制算法 (MPC) 存在设定点控制与区间控制两种策略, 区间预测控制较之设定点控制在技术上具有先进性。目前, 主流的预测控制软件技术均采用双层结构, 即上层稳态优化计算最优设定点, 下层动态控制负责动态跟踪最优设定点。从过程稳态的角度出发, 分别对区间预测控制和双层结构预测控制进行了机理分析, 从定性与定量两个方面比较了这两者的异同点, 提出并证明了两者的一致性条件。论述了双层结构预测控制较之单层结构下的区间控制更具先进性。

关键词: 模型预测控制; 区间控制; 稳态优化

DOI: 10.3969/j.issn.0438-1157.2013.12.031

中图分类号: TP 273

文献标志码: A

文章编号: 0438-1157 (2013) 12-4474-10

From zone model predictive control to double-layered model predictive control

ZOU Tao¹, WANG Dingding², PAN Hao¹, YUAN Mingzhe¹, JI Zhongwan³

(¹ Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016, Liaoning, China;

² College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, Zhejiang, China;

³ Lishui University, Lishui 323000, Zhejiang, China)

Abstract: There exist two different strategies in model predictive control (MPC), *i. e.*, set-point control and zone control. In comparison, zone MPC is thought to be a better strategy. However, there exists an improved set-point control strategy, *i. e.*, double-layered MPC, which computes set points through the steady-state target calculation in the same control cycle. In this paper, from the aspect of process steady state, the principles of zone control and double-layered MPC are analyzed. We discuss the differences and similarities between the two strategies both qualitatively and quantitatively, and prove that the two strategies are consistent in a certain context. Simulation results are given to validate the conclusion.

Key words: model predictive control; zone control; steady-state optimization

引 言

模型预测控制 (MPC)^[1-4] 是一类起源于工业过程实践的计算机控制方法的总称。MPC 算法的

原理是通过模型对过程在输入作用下的响应进行预测, 然后在每一个控制周期中通过极小化一个性能指标函数得到控制器作用, 同时在每个控制周期起始会不断地通过反馈校正提高模型预测的准确性,

2013-08-23 收到初稿, 2013-09-03 收到修改稿。

联系人及第一作者: 邹涛 (1975—), 男, 博士, 副研究员。

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61074059); 中国科学院知识创新项目 (KGCX2-EW-104); 浙江省自然科学基金项目 (Y12F030052)。

Received date: 2013-08-23.

Corresponding author: ZOU Tao, zoutao@sia.cn

Foundation item: supported by the National Natural Science Foundation of China (61074059).

从而实现无静差控制，其中比较经典的 MPC 算法有 DMCC^[5]、GPC^[6]、MAC^[7] 等。自 MPC 出现之后因其适用于解决多变量有约束复杂过程控制问题的特点，迄今为止，不仅在石油化工领域，在其他过程行业中同样得到了广泛的应用。

在工业生产过程中，存在着大量的非方系统，而非方系统又可进一步分为胖系统与瘦系统，众所周知，很容易利用 MPC 实现胖系统的无静差控制。但在利用 MPC 对瘦系统进行控制时，对于给定的设定点，则容易在输出端出现稳态静差。目前文献中通常利用自由度的概念对上述现象进行分析^[8]，这是一种定性的分析方法，即胖系统的输入个数大于输出个数，有多余的自由度，因而可以实现无静差控制，而瘦系统则因为自由度的缺失，易出现输出端的稳态静差。

因此，在工业现场常常采用的方法是，放松对部分输出的控制要求，给定一个输出允许的区间，作为其软控制目标，变相地增加了瘦系统的自由度，从而消除稳态静差，实现无静差控制，将这种策略称为模型预测控制的区间控制策略。几乎所有的主流预测控制软件都提供了实现区间控制的方式，而学术界对于区间控制的许多研究成果关注的是该策略的实现算法及其稳定性。文献 [9] 提出了一种稳定的区间控制 MPC 算法，并通过一个病态精馏塔例子的仿真展现了该方法具有的优势，文献 [10] 考虑了实现区间控制方法时不断变换的控制结构可能带来的闭环不稳定性问题，针对开环稳定过程提出了一种稳定的 MPC 区间控制方法。文献 [11] 中针对大规模系统的控制，提出一种包含区间控制的三层结构方法解决各个子控制器之间的动态协调问题。但是，从稳态层面对区间控制策略进行分析研究的成果则比较少见。

同时，可以在许多文献中看到目前还存在一种改进的预测控制方法，即集成了稳态目标计算的双层结构预测控制方法^[12-16]，该控制方法既可以来自 RTO^[17] 的全局优化点进行跟踪，也可以针对 MPC 所控过程进行局部经济优化。双层结构的预测控制方法本质上在实施过程中采用的还是一般的设定点策略，即将所有输出控制到固定的点，而非给定的区间，且同样可以实现瘦系统的无静差控制，将这种方法称为预测控制的稳态优化策略。

前述的模型预测控制方法的两种不同的设定点

给定策略均可实现瘦系统的无静差控制，但是目前基于自由度概念的分析显得不够精确，而且仅仅利用自由度的概念无法对预测控制的稳态策略进行分析，因为它在控制瘦系统时仍能实现无静差控制。同时，对于这两种策略能够消除稳态静差的原因并没有得到很好的讨论。本文将从过程稳态角度出发，利用线性代数方法定量地分析利用预测控制方法控制瘦系统时易出现输出端静差的原因，以及这两种策略作用的机理，并对比了这两种不同控制策略的异同点，得出了在一定条件下两者存在一致性的结论。最后通过仿真验证了本文包含的观点与得出的结论。

1 模型预测控制算法的稳态优化策略

前文提到的预测控制方法的稳态优化策略属于双层结构预测控制方法，如图 1 所示结构框架。在控制器投运初期，通常只进行动态控制，等待过程平稳后再启动稳态目标计算进行经济优化。

从图中可以看到，该方法包括两个部分：①稳态目标计算方法。基于过程的稳态信息，以极大化过程的经济效益为目标，通过稳态优化得到输入输出最优工作点，并在同一个 MPC 算法执行周期内将得到的最优工作点作为输入输出的设定点。而且通常在求解优化问题得到最优工作点前会对优化问题是否有解进行判断，若在当前约束条件组成的域内无解，通常采用的方法是对软约束（包括输入的外部设定目标，输出相关的约束条件，在此需要注意：输入的增量变化约束与位置约束是不可逾越的，即为硬约束）按照设定的优先级进行放松，从而形成一个可行域保证优化问题有解。②无约束的动态控制，即在同一个控制周期内采用无约束的 MPC 算法计算控制器作用。

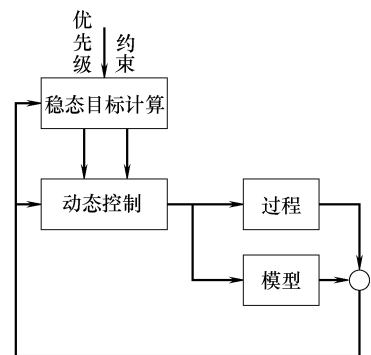


图 1 双层预测控制方法结构框图

其中稳态目标计算方法可以描述为一个 LP 或者 QP 形式的优化问题（在此给出 LP 形式的描述）。

$$\left. \begin{aligned} \min_{\Delta u} J &= \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{u} \\ \text{s. t. } \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{G}_u \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G}_f \Delta \mathbf{f} + \mathbf{e}, \\ \mathbf{u}_{LL} &\leq \mathbf{u}_b + \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{HL}, \\ \mathbf{y}_{LL} &\leq \mathbf{y}_b + \Delta \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_{HL}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

假设过程有 m 个输入, p 个输出, 预测时域为 P , 控制时域为 M , 公式中的 $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m]^T$, $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1 \ \Delta u_2 \ \dots \ \Delta u_m]^T$, \mathbf{c} 是体现控制工程师取向的向量, 在此是将 \mathbf{c} 与过程的经济效益挂钩, 将 \mathbf{c} 作为代价系数向量, 根据各个控制输入变量的标准化效益或成本进行设定, 那么上述优化问题得到的解便是一组能够在当前约束条件下取得极大化经济效益的工作点。 \mathbf{G}_u , \mathbf{G}_f 分别是输入与可测扰动的稳态增益系数矩阵, \mathbf{u}_{LL} 为控制输入的下限, \mathbf{u}_{HL} 为控制输入的上限, \mathbf{y}_{LL} 为被控输出的下限, \mathbf{y}_{HL} 为被控输出的上限。 \mathbf{e} 为误差修正量, 可根据过程的预测误差计算得出, 即

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}(k | k-1)$$

其中, \mathbf{y} 为当前时刻输出值, $\tilde{\mathbf{y}}(k | k-1)$ 为当前时刻预测输出值。 \mathbf{u}_b , \mathbf{y}_b 分别是上一时刻的输入与输出向量。

对于优化问题的可行性判定与软约束调整算法, 详见文献 [18], 在此简要介绍其基本原理。优化问题可以简要描述为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\Delta u} J &= \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{u} \\ \text{s. t. } A \Delta \mathbf{u} &\leq b \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

若优化问题无解, 则需对约束进行放松, 按照文献 [18] 中论述的升序策略, 先对优先级为 1 的约束进行放松, 即约束条件需变化为: $A \Delta \mathbf{u} \leq b + \epsilon^1$, 其中 $\epsilon \geq 0$, 即为约束放松的幅度, 而算法需要求解得到该放松幅度, 则优化问题转变为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\Delta u} J &= [\mathbf{0} \ C] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \epsilon^1 \end{bmatrix} \\ \text{s. t. } [A \ -I^1] &\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \epsilon^1 \end{bmatrix} \leq b \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中, C 为用户设定的放松权系数, I^1 为优先级为 1 的约束条件对应的单位阵, 这样通过求解转变后的优化问题即可得到 ϵ^1 , 同时更新 b 为 $b_{\text{update}} = b + \epsilon^1$, 再对优先级为 2 的约束进行放松, 同样地, 该优化问题可以描述为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\Delta u} J &= [\mathbf{0} \ C_L \ C] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \epsilon^1 \\ \epsilon^2 \end{bmatrix} \\ \text{s. t. } [A \ -I^1 \ -I^2] &\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \epsilon^1 \\ \epsilon^2 \end{bmatrix} \leq b_{\text{update}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中, C_L 为一个值较大的数, 这样处理可以保证优先级为 1 的约束尽量不再放松, 但是在极端条件下仍可放松, 可以很好地保证算法不出现计算机的数值问题。在求解完成后再次更新 b_{update} , 且对后续的优先级均进行上述处理, 即完成了软约束调整, 保证了优化问题具有一个可行域。

在动态控制算法 (这里以 DMC 算法为例) 中, 输入与输出目标均包含在优化指标 J 中

$$J(k) = \|\mathbf{w}(k) - \tilde{\mathbf{y}}_{PM}(k)\|_Q^2 + \|\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_{ss}(k)\|_V^2 + \|\Delta \mathbf{u}_M(k)\|_R^2 \quad (5)$$

$\mathbf{w}(k)$ 为设定值向量, $\tilde{\mathbf{y}}_{PM}(k)$ 是 M 步控制输入作用下未来 P 个时刻的输出预测值, $\tilde{\mathbf{y}}_{PM}(k) = \tilde{\mathbf{y}}_{p0}(k) + A \Delta \mathbf{u}_M(k)$, $\tilde{\mathbf{y}}_{p0}(k)$ 为初始预测值向量, A 为阶跃响应系数矩阵, 且

$$\tilde{\mathbf{y}}_{PM}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{1,PM}(k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_{p,PM}(k) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}}_{p0}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{1,p0}(k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_{p,p0}(k) \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{u}_M(k) = \begin{bmatrix} \Delta u_{1,M}(k) \\ \vdots \\ \Delta u_{m,M}(k) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \dots & A_{pm} \end{bmatrix}$$

\mathbf{u}_{ss} 为控制输入的优化目标, $\mathbf{u}(k)$ 为控制输入的未来作用量, $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1) + B \Delta \mathbf{u}_M(k)$, $B = \text{block-diag}(B_0, \dots, B_0)$ (m 块),

$$\mathbf{u}(k-1) = \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ \vdots \\ u_1(k-1) \\ \vdots \\ u_m(k-1) \\ \vdots \\ u_m(k-1) \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(M \times M)}$$

$$V = \text{block-diag}(V_1, \dots, V_m)$$

$$V_i = \text{diag}(v_i(1), \dots, v_i(M)), \quad i = 1, \dots, m$$

通过极小化上述性能指标 J , 可以得出最优控制器作用

$$\Delta \mathbf{u}(k) = LD_1(\mathbf{w}(k) - \tilde{\mathbf{y}}_{p0}(k)) + LD_2(\mathbf{u}_{ss} - \mathbf{u}(k-1))$$

其中

$$D_1 = (A^T Q A + B^T V B + R)^{-1} A^T Q$$

$$D_2 = (A^T Q A + B^T V B + R)^{-1} B^T V$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & 0 \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

关于反馈校正部分的算法细节由于不影响文章主旨，在此不再赘述。

2 模型预测控制算法的区间控制策略

在这里简要给出区间控制策略的理论算法。一般的 MPC 算法（这里仍旧以 DMC 为例）的目标函数描述如下

$$J(k) = \|w(k) - \tilde{y}_{PM}(k)\|_Q^2 + \|\Delta u_M(k)\|_R^2 \quad (6)$$

区间控制方法的独特之处在于不需要准确地将输出控至某一组设定点，而是保持输出在一定的范围内即可，在此需要注意由于预测控制多用于控制多输入多输出（MIMO）过程，因此区间控制方法在实际中多采用一种混合控制模式：即部分输出要求控制到设定点，而部分输出只需控制到给定的范围即可。区间控制方法的实现可以根据其特殊的控制要求，通过对一般的 DMC 算法的目标函数进行相应改造实现。改造后的目标函数可以表示为

$$J(k) = \|(\tilde{y}_{PM} - y_{spec})\|_{Q_{spec}}^2 + \|\Delta u_M(k)\|_R^2 \quad (7)$$

且控制器作用可由下式计算

$$\Delta u(k) = L(A^T Q_{spec} A + R)^{-1} A^T Q_{spec} (y_{spec} - \tilde{y}_{P0}(k))$$

目标函数中的 y_{spec} 、 Q_{spec} 分别表示区间控制方法中的设定点向量与输出权系数矩阵，只需要对 y_{spec} 与 Q_{spec} 进行改造即可实现区间控制的效果。改造遵循的原则是：若输出预测值在给定范围内，则不对其惩罚，若超出给定范围，才给予惩罚。即在满足最低约束的条件之下，若未来时刻输出的预测值在所设定的区间范围内，则不对其进行惩罚，将相应的输出权系数置为 0， y_{spec} 在这一时刻可以取任意值；若输出预测值超出了设定区间的上限，则将区间的上限作为 y_{spec} 的值，根据相应设定的权系数进行惩罚；同理，若输出预测值超出了设定区间的下限，则将区间的下限作为 y_{spec} 的值，同样根据相应的权系数对输出超出边界的距离进行惩罚，这样便可实现相应输出的区间控制。且在区间控制方法具体实现时还可以通过设计不同的惩罚通道形状^[11,19]，即对 y_{spec} 进行设计，来实现不同程度的区间控制，设计通道的具体形状如图 2 所示，通道 1 意味着 y_{spec} 的取值一直是给定范围的上限或者下限，而通道 2 表示在起始的一个时间段 $[0, t_1]$ 内对给定的范围进行一定程度的放松，其上限或者下限可以

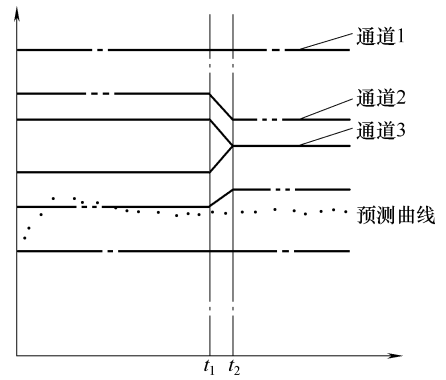


图 2 区间控制方法的 3 种设计通道

Fig. 2 Three design channels of zone control

大于规定的范围，然后逐渐将开口以一定的斜率收紧至规定的范围，这样处理的好处是相比通道 1 的设计，留给控制器更多的调节时间，意味着更少的控制器动作，而通道 3 的不同之处在于通道最终是闭合的，意味着其最终的控制目标是将输出控至设定点。

注意，这里得到的控制作用同一般的 DMC 算法一样，仍旧只执行第一步控制作用，其余的模型预测与反馈校正部分也保持不变，由于不影响文章所要表现的主旨，在此不给出算法的具体细节。这种控制方法能够以最小的控制器动作将过程从一个稳态工作点转移到另一个工作点时，使过程更加平稳、安全。

3 预测控制的稳态优化策略与区间控制策略比较

区间控制方法的出现是为了解决控制过程中缺少自由度的问题：即对瘦系统进行控制时，由于输入变量的数目少于输出变量的数目，系统存在缺少自由度的问题，对于给定的设定点，最终会在输出端出现静差，控制无法取得满意的效果。因此，许多文献中都提出对于一些特定的对象，如储罐的液位控制等不需要严格控制到某一“点”的过程，放松其控制要求，使其“稳定”在给定的约束范围内（即某一区间内），从而在一定程度上增加了系统的自由度，进而使其他输出的控制要求得到满足，消除输出端静差。但是，为什么在对瘦系统进行控制时会出现输出端的静差？而区间控制方法为什么又可以消除静差？下面对这两个问题进行讨论。

首先讨论一下控制的作用。众所周知，利用控

制方法能够使过程由一个工作点（稳态）转移到另一个工作点（稳态），同时能够保证这个转移的过程快速或者平稳（具体取得哪种效果与具体控制过程的控制器配置有关），同时能够快速地对扰动进行抑制，保持过程的平稳。那么，为什么可以利用控制器取得这样的效果呢？

众所周知，输出的最终状态是由输入决定^[20]的，即输入决定输出，两者具有互相对应的关系，它们的关系可以用下述线性方程组表示，即

$$\mathbf{G}\Delta\mathbf{u}_{ss} = \Delta\mathbf{y}_{ss} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1} & g_{p2} & \cdots & g_{pm} \end{bmatrix}_{p \times m}$ 是由稳态增益

系数组成的矩阵， $\Delta\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{y}_{ss} - \mathbf{y}_0$ ， \mathbf{y}_{ss} 为被控输出变量的稳态值， \mathbf{y}_0 为被控输出的初始稳态值。 $\Delta\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{u}_0$ ， \mathbf{u}_{ss} 为控制输入的稳态值， \mathbf{u}_0 为控制输入的初始稳态值，注意在这里并未包含扰动。且过程的动态特性是由输入从初始稳态至另一个稳态过程中的迁移路径所决定的。而在控制开始前，通常得到的控制目标是输出设定点，即要求利用控制器将输出从当前的状态转移到给定的状态。而控制算法的作用则是利用给出的设定点与调节时间内的每一采样时刻的状态，规划输入（控制作用的执行机构）从当前稳态转移到目标稳态（即与所给设定点潜在对应稳态）的迁移路径。

下面从线性代数的角度对采用预测控制方法的两种不同策略对瘦系统进行控制时得到的不同效果进行分析。对于一个瘦系统，即系统的输入个数小于输出个数，从线性代数的角度上看，表示输入输出稳态关系方程中的方程个数大于未知量的个数，该方程是超定的，而超定的方程组通常是不相容的，原因在于稳态增益矩阵 \mathbf{G} 的秩与包含 $\Delta\mathbf{y}_{ss}$ 后的增广矩阵的秩不等，即稳态方程易出现无解的情况，意味着对于一组给定的输出设定点，控制器无法找到其潜在对应的输入稳态点，那么输出端静差的出现也就显得理所当然了。因此，可以得出瘦系统通常不可控的根本原因在于设定点的给定不够合理，解决瘦系统控制问题的思路也很明显：①重新选取一组更加合理（即能够使输入输出稳态关系方程有解）的设定点；②减少方程组的个数，使得方程组的个数（输出个数）等于未知变量（输入）的个数（存在唯一解），或者使方程组的个数少于未知变量的个数（方程组成为亚定方程组，通常有

解，且有无数组解）。

可以发现，区间控制方法与第二种解决的思路完全契合，其本质在于：针对一个瘦系统的控制，对部分输出采取区间控制策略，即意味着抛弃了这部分输出的设定点，即减少了稳态方程组中方程的个数，使得方程组存在唯一解，甚至无数解（存在解的个数与采用区间控制策略的输出数目有关），从而消除输出端存在的静差。

同时，区间控制的另一个特点是对于扰动的处理方式，在极端的情况下（所有输出均采用区间控制的方式）对于进入过程的扰动，控制器有可能完全不产生任何动作（仿真 1，图 4），且对于采用混合控制模式的过程（部分输出为设定点控制、部分输出为区间控制，这也是实际中常见的情况）控制器能够以最小的控制器动作应对扰动（仿真 1，图 6）。在此针对上述现象，从过程稳态的关系出发，借用线性代数来分析区间控制方法的机制。

假设有阶跃扰动进入过程，那么可以认为一个不受控制的“输入”作用于过程，过程的稳态平衡关系变化为

$$\mathbf{G}\Delta\mathbf{u}_{ss} + \mathbf{G}_f\Delta\mathbf{f} = \Delta\mathbf{y}_{ss} \quad (9)$$

其中， \mathbf{G}_f 、 $\Delta\mathbf{f}$ 分别是可测扰动的增益矩阵与扰动变化量。对于一般的采用设定点控制的过程，即 $\Delta\mathbf{y}_{ss}$ 是固定的，潜在的 $\Delta\mathbf{u}_{ss}$ 会发生变化去保证 $\Delta\mathbf{y}_{ss}$ 保持不变，若被控系统是瘦系统（即方程超定）那么很有可能方程无解，即在输入允许的约束空间内找不到对应的 $\Delta\mathbf{u}_{ss}$ ，因此输出无法保持不变，因此输出最终稳定的值与所给输出设定点不同，就会在输出端观察到静差；而对于采用区间控制方法的过程，在抛弃了部分输出的设定点之后，方程组很可能处于亚定的情况，即在约束空间内找到对应的 $\Delta\mathbf{u}_{ss}$ ，这就是区间控制能够很好地完成瘦系统控制的原因。而区间控制方法能以最小动作处理扰动的原因也正是如此，因为目标函数中包含了对于控制器动作的惩罚项，相当于控制器挑选了一组最小的 $\Delta\mathbf{u}_{ss}$ 使得稳态关系方程组得到了满足。

注释 1：本文在论述与仿真中采用的区间控制方法为非 QP 形式的无约束区间控制方法，这是因为 QP 问题的求解计算量巨大，特别是原 QP 问题不可行，需要进行约束放松的情况，而无约束区间控制方法仅需进行矩阵运算，相比计算量要小得多，同时仿真中采用的惩罚通道为图 2 中的通道 1。

注释 2：需要注意对于瘦系统的控制，并不是采用了区间控制策略，就一定能消除输出端的静差，取得好的效果。原因在于：对部分输出采取区间控制的策略之后，稳态关系方程组仍然可能是超定的，即仍旧无解，这意味着需要根据输入的个数，在过程实际控制条件允许的情况下，对多个输出采用区间控制的策略，使方程组变成正常的或者亚定的，从而保证稳态关系方程组存在唯一解，或者无穷解，消除输出端的静差，使系统得到满意的控制效果。

注释 3：需要注意输入硬约束对于控制的影响，因为对于某些给定的设定点，其对应的输入稳态点可能位于输入的硬约束之外，那么即便采用区间控制的策略，输出端仍会有静差的出现。用仿真验证了这一观点，见仿真 2，图 7。

注释 4：还需要注意的是采用区间控制策略输出的约束边界，若通过设定点求出的输入稳态点会使采用区间控制策略输出的稳态值超出约束边界，则输出端仍会有静差的出现，因为此时相当于将被超越的约束边界重新作为该输出的设定点，输入输出稳态关系方程重新成为超定的方程组，同样会出现无解的情况。同样用仿真验证了这一观点，见仿真 2，图 8。

在分析了区间控制方法的作用机制后，再来查看稳态优化策略的作用机制，从稳态优化策略的算法描述中可以得出：①通过稳态优化得到的输入及输出工作点都在约束内；②输入与输出满足稳态关系式，是一组平衡的工作点。不论系统是方系统、胖系统还是瘦系统，通过稳态目标计算之后，控制器已经得到了一组约束条件内的平衡输入输出工作点，而且可以将输入输出目标点同时进行控制，这与区间控制方法通过给定的输出设定点求逆从而确定输入的最终稳态工作点相比，求取输入稳态的机制发生了根本的变化，这样的处理方式可以很好地避免采用区间控制策略控制瘦系统时可能出现的问题。当然，被控系统如果是瘦系统，也可能出现同样的无解情况，这时，可以通过对约束的边界按优先级进行放松^[11]来确保优化问题有解。

在分析了两种不同控制策略的作用机制后，需要考虑两者是否存在相同点呢？可以发现，不论是采用区间控制的方法还是采取稳态优化策略，若没有时变的扰动，过程最终会稳定，即不论是输入，或者输出最终会稳定在区间内的某一点上，而不是

输出一旦采用区间控制策略，便会在给定区间内任意波动，对比区间控制策略，可以发现双层结构预测控制方法将输出端软约束的要求转移到了稳态目标计算部分，作为 LP 问题的一个约束条件存在，而两种不同的控制策略的区别在于：稳态优化策略能够直接给出所有输入输出稳态工作点，而区间控制策略则是通过给出的部分输出设定点求逆得到一组输入稳态点，再由输入工作点决定其余输出设定点的稳态位置。那么这两种方法究竟存在什么关系呢？下面还是从稳态平衡关系方程出发，用线性代数中方程组求解的理论对这个问题进行分析。

假定一个过程（瘦系统）通过稳态优化得到一组输入输出解，则表示下述的超定方程组是相容的，且解是唯一的，即

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (10)$$

其中， m 为被控输出个数， n 为控制输入个数，其中 $n < m$ ，也可以写成如下形式

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = [b_1 \quad \cdots \quad b_m]^T$$

由于方程组存在唯一解，则化简后的方程组的非零行组成了一个严格三角形方程组，即

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_n & b'_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (11)$$

因为若非零行的行数小于 n ，则存在自由变量，意味着存在无数解，若增广矩阵的秩大于系数矩阵则方程组无解，而通过稳态优化确保了上述的严格三角形方程组存在。

而若有部分输出采用区间控制策略，即输出设定点向量 $[b_1 \quad \cdots \quad b_m]^T$ 中部分值是未知的，这里需分为两种情况进行讨论。若未知的个数大于 $m - n$ ，即有超过 $m - n$ 个输出采用区间控制的策略，则式(10) 变成一个亚定方程组，存在无数组解，即有无数个输入能够满足这样的输出设定点，这与稳态优化策略下只存在一组输入输出工作点是显然不同的，但是若未知的个数小于或者等于 $m - n$ ，

即采用区间控制策略的输出个数不超过 $m-n$ ，则方程组同样能够简化为严格三角形形式，即最终得到的输入稳态工作点与采用稳态优化策略得到的输入工作点是相同的，进而可以得出所有的输出工作点与采用稳态优化策略得到的输出工作点是相同的。因此，可以得出在“采用区间控制策略的输出个数不超过 $m-n$ ”时，两种控制策略得到的控制效果是相同的，即两种方法存在一致性。用仿真实验验证了这一结论，见仿真 2，图 9。

4 仿 真

在这一节中，通过仿真来验证前文内容中所给出的结论，仿真的对象是 Shell 石油重油分馏塔模型，这是一个标准 (Benchmark) 控制问题，它的对象是一个多变量、有约束的系统，具有很好的代表性，见图 3。

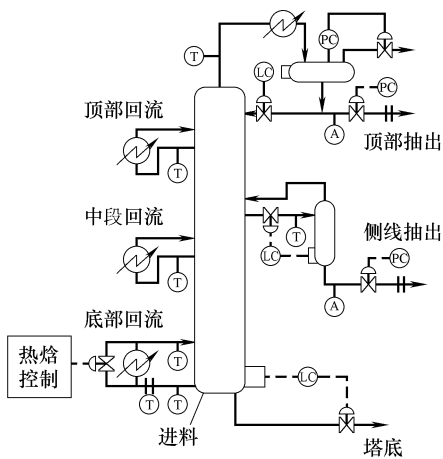


图 3 重油分馏器

Fig. 3 Heavy oil fractionator

其过程模型如下

$$G_u(s) = \begin{bmatrix} \frac{4.05e^{-27s}}{50s+1} & \frac{1.77e^{-28s}}{60s+1} & \frac{5.88e^{-27s}}{50s+1} \\ \frac{5.39e^{-18s}}{50s+1} & \frac{5.72e^{-14s}}{60s+1} & \frac{6.90e^{-15s}}{40s+1} \\ \frac{4.38e^{-20s}}{33s+1} & \frac{4.42e^{-22s}}{44s+1} & \frac{7.20}{19s+1} \end{bmatrix}$$

扰动模型为

$$G_f(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.20e^{-27s}}{45s+1} & \frac{1.44e^{-27s}}{40s+1} \\ \frac{1.52e^{-15s}}{25s+1} & \frac{1.83e^{-15s}}{20s+1} \\ \frac{1.14}{27s+1} & \frac{1.26}{32s+1} \end{bmatrix}$$

下面各个仿真中用到的例子均来源于上述模型。

4.1 仿真 1

(1) 为了展现区间控制方法的控制效果，在仿真 1 中对 3 个输出均采用区间控制，同时为了查看区间控制方法处理扰动的情况，在 $k=200$ 时刻，添加一个幅值为 0.1 阶跃扰动，即 $dv1 = [-0.1 \ -0.1]^T$ ，控制效果如图 4 所示，可以看到输入没有发生变化，即控制器在 600 个控制周期内没有产生控制作用。

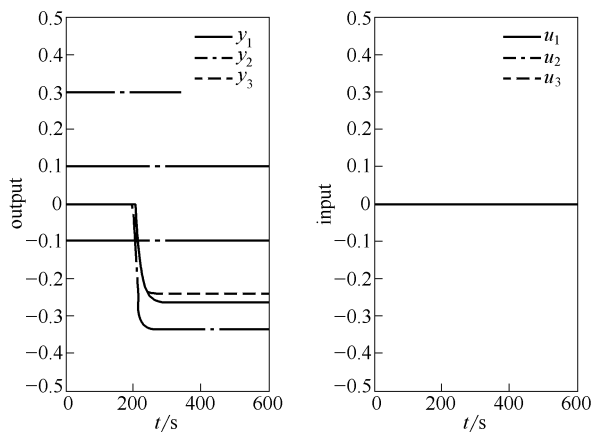


图 4 区间控制效果图 (扰动幅值为 0.1)

Fig. 4 Control result of zone control (magnitude of disturbance is 0.1)

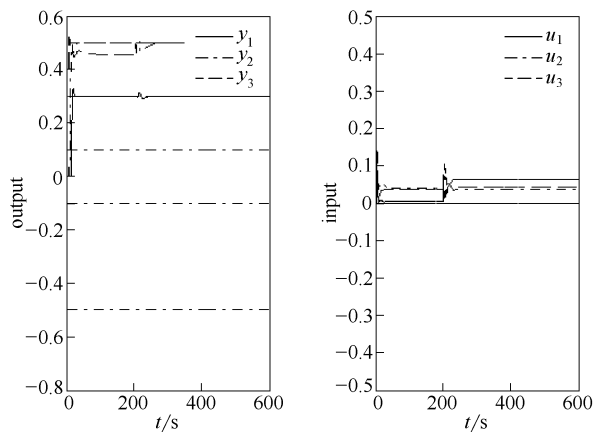


图 5 混合控制效果图 (扰动幅值为 0.1)

Fig. 5 Control result of mixed mode control (magnitude of disturbance is 0.1)

(2) 在仿真 1 中，为了查看混合控制方式下区间控制作用的控制效果，及其处理扰动的方式，将对一个输入采取设定点控制，其设定点为 0.3，对其余两个输入采用区间控制，同样在 $k=200$ 时刻，添加一个幅值为 0.1 阶跃扰动，即 $dv1 = [-0.1 \ -0.1]^T$ ，控制效果如图 5 所示，可以看出在扰动进入过程后第一个输入很快回到了设定

点，而其余两个输入的稳态值在区间内发生了变化。

(3) 为了对比区间控制与设定点控制方法的不同控制效果，在仿真 1 中，对 3 个输出均采用设定点控制，输出设定点向量为 $w = [0.3, -0.1, 0.1]^T$ ，同样在 $k=200$ 时刻，添加一个幅值为 0.1 相同的阶跃扰动，控制效果如图 6 所示。

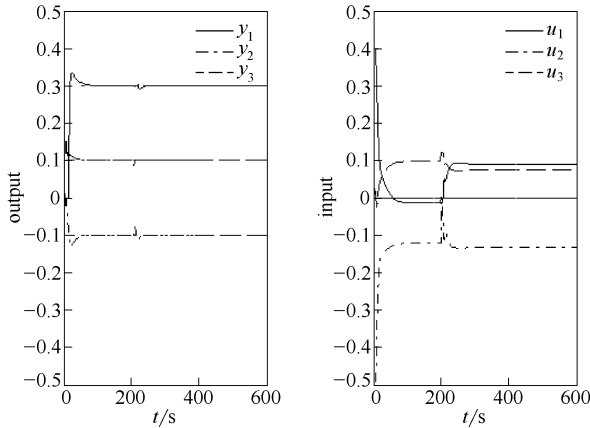


图 6 设定点控制效果图 (扰动幅值为 0.1)

Fig. 6 Control result of set-point control (magnitude of disturbance is 0.1)

注意，上述仿真中的预测时域 P 取 120，预测时域 M 取 10，模型的截断长度为 120，控制权系数 Q, R 均取 1，区间约束条件如下

$$\begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \leq y \leq \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \leq \Delta u \leq \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

从仿真对比图上可以看出，由于区间控制方法中对预测值在规定范围内时不进行惩罚，因而控制器在扰动作用较小，即扰动的作用不会使输出超出规定范围时，控制器不会进行动作，而在扰动变大，产生的作用将使输出超出规定范围时，控制器仅仅产生最小的控制作用，将输出拉回区间后，便不再产生动作。而若对输出采用设定点（设定点来自于稳态优化）跟踪控制，则控制器会立即产生动作使输出快速地达到设定点。

4.2 仿真 2

在仿真 2 中，将前面的重油分馏塔模型改造成一个 2 输入 3 输出的瘦系统，来查看采用区间控制策略对瘦系统进行控制时易出现的问题，在这个仿真例子中对第三个输出采用区间控制，且其区间设定范围为 $[-0.5, 0.5]$ ，输入的硬约束为 $[-0.5, 0.5]$ ，预测时域 P 取 120，预测时域 M 取 10，模

型的截断长度为 120，权系数 Q, R 均为 1，其模型如下

$$G_u(s) = \begin{bmatrix} \frac{4.05e^{-27s}}{50s+1} & \frac{1.77e^{-28s}}{60s+1} \\ \frac{5.39e^{-18s}}{50s+1} & \frac{5.72e^{-14s}}{60s+1} \\ \frac{4.38e^{-20s}}{33s+1} & \frac{4.42e^{-22s}}{44s+1} \end{bmatrix}$$

(1) 对于其余两个输入给定设定点为 $[1.1628, -0.1683]$ ，从稳态平衡关系式中可以得出其相对应的输入稳态值为 $[0.51, -0.51]$ ，已经超过了硬约束的范围，其控制效果如图 7 所示。

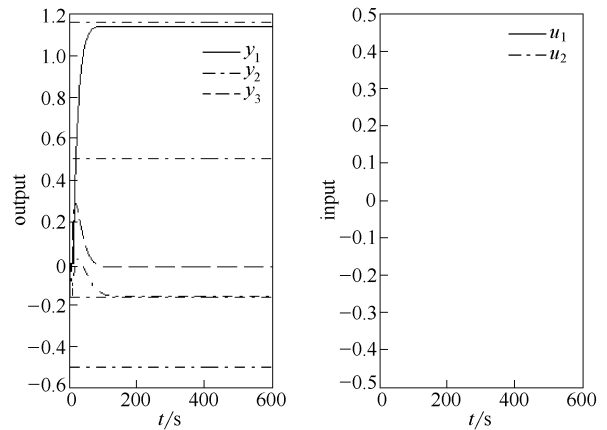


图 7 输入硬约束限制下的区间控制效果

Fig. 7 Control result of zone control with input hard constraint

可以看出第三个输出仍旧位于给定的区间范围内，两个输入分别达到了约束上下限，其余两个输出均没有达到设定点，输出端出现了静差。

(2) 对于采用设定点控制的两个输入给定设定点为 $[0.3795, 0.8415]$ ，其潜在对应的输入工作点为 $[0.0569, 0.0801]$ ，同时可以计算出第三个输出最终稳定的点为 0.6035，超过了区间的边界，因此在控制时，按照区间控制的计算方式，值 0.5 会作为第三个输出的设定点参与计算，但是该超定方程组是无解的，因此最终输出均没有达到设定点，其控制效果曲线如图 8 所示。

(3) 对于一组通过稳态优化得到的输出设定点 $[0.5, 0.5, 0.4175]$ ，其对应的输入稳态值为 $[0.1449, -0.0492]$ ，对这组设定点，对 3 个设定点分别进行完全跟踪，以及对第 3 个设定点进行区间控制，两种方法的控制效果均如图 9 所示。

注意，这里的动态控制算法均未包含输入目

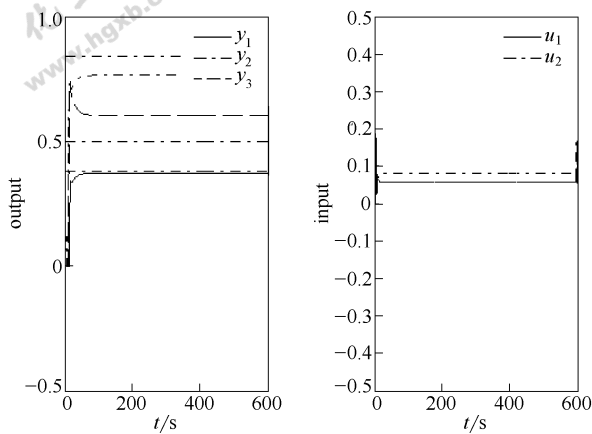


图 8 输出区间边界限制下的区间控制效果

Fig. 8 Control result of zone control with constraint on output range boundaries

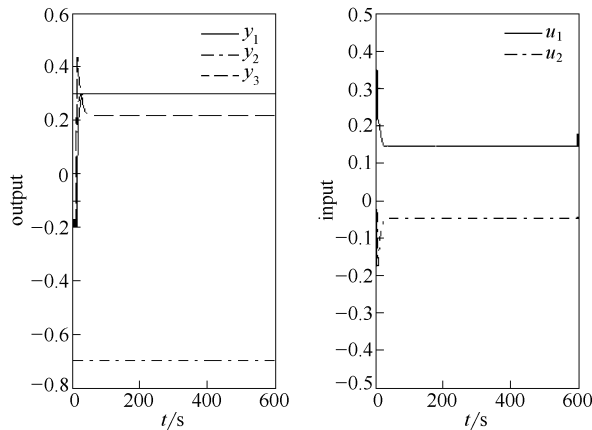


图 9 稳态优化策略与区间控制策略控制效果对比

Fig. 9 Comparison of control result between steady state optimization and zone control

标, 这样处理是为了对比的效果。包含输入目标的情况下, 两种方法的最终输入输出稳态也完全一致, 这并不影响本文的结论。可以看出虽然对第三个输出采用了区间控制的策略, 但是得到的控制效果是一样的, 这也验证了前文的分析。

5 结 论

本文从模型的稳态平衡关系出发, 分析了瘦系统控制时存在输出端静差的根本原因, 同时对一般的用于解决瘦系统控制问题的区间预测控制方法进行了深入分析, 指明了其能够有效解决瘦系统控制问题的原因及其可能出现的问题, 提出利用稳态优化的策略系统解决瘦系统控制问题, 并比较了两种策略的异同点, 得出了两种方法在一定条件下存在一致性的结论。

符 号 说 明

- A ——约束条件等式(不等式)左乘项
- B ——控制作用的累加矩阵
- b ——约束条件等式(不等式)右边项
- c ——稳态优化中的代价系数向量
- e ——预测误差
- Δf ——前馈扰动的变化量
- G_f, G_u ——分别为前馈扰动以及控制输入的增益矩阵
- J ——性能指标
- M ——控制时域
- P ——预测时域
- Q, Q_{spec} ——分别为输出目标与输出多步预测距离的惩罚权系数矩阵
- R ——控制输入变化量的惩罚权系数矩阵
- u_{HL} ——输入上限
- u_{LL} ——输入下限
- u_{ls} ——上一时刻输入稳态值
- u_{ss} ——控制输入稳态值
- u_0 ——控制输入初始稳态值
- Δu ——控制输入变化量
- Δu_M ——未来 M 步的控制输入变化量
- Δu_{ss} ——控制输入稳态变化量
- V ——控制输入与输入目标距离的惩罚权系数矩阵
- w ——输出设定点
- y_{HL} ——输出操作上限
- y_{LL} ——输出操作下限
- y_{ls} ——上一时刻输出稳态值
- y_{spec} ——区间控制策略中的设定点向量
- y_{ss} ——输出稳态值
- y_0 ——输出初始稳态值
- \tilde{y}_{PM} —— M 步控制输入作用下未来 P 个时刻的输出预测值
- \tilde{y}_{P0} ——初始预测值向量
- Δy_{ss} ——输出稳态变化量

References

- [1] Morari M, Lee H J. Model predictive control: past, present and future [J]. *Computers & Chemical Engineering*, 1999, **23** (4/5): 667-682
- [2] García C E, Prett D M, Morari M. Model predictive control: theory and practice—a survey [J]. *Automatica*, 1989, **25** (3): 335-348
- [3] Xi Yugeng (席裕庚). Model Predictive Control (预测控制)[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1993
- [4] Qian Jixin (钱积新), Zhao Jun (赵均), Xu Zuhua (徐祖华). Predictive Control (预测控制)[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2007
- [5] Culter C R, Ramaker B L. Dynamic matrix control—a

- computer control algorithm//AIChE National Meeting [C]. Houston, TX, 1979
- [6] Neshasteriz A R, Khaki Sedigh A, Sadjadian H. Generalized predictive control and tuning of industrial processes with second order plus dead time models [J]. *Journal of Process Control*, 2010, **20** (1): 63-72
- [7] Richalet J, Rault A, Testud J L, Papon J. Model predictive heuristic control: application to industrial process [J]. *Automatica*, 1978, **14**: 413-428
- [8] Xi Yugeng (席裕庚). Satisfactory control of complex industrial process [J]. *Information and Control* (信息与控制), 1995, **24** (1): 14-20
- [9] Ferramosca A, Limon D, González A H, Odloak D, Camacho E F. MPC for tracking zone regions [J]. *Journal of Process Control*, 2010, **20** (4): 506-516
- [10] González A H, Odloak D. A stable MPC with zone control [J]. *Journal of Process Control*, 2009, **19** (1): 110-122
- [11] Lu J Z. Challenging control problems and emerging technologies in enterprise optimization [J]. *Control Engineering Practice*, 2003, **11** (8): 847-858
- [12] Rao C V, Rawings J B. Steady states and constraints in model predictive control [J]. *AIChE J.*, 1999, **45** (6): 1266-1278
- [13] Kassmann D E, Badgwell T A, Hawkins R B. Robust steady-state target calculation for model predictive control [J]. *AIChE J.*, 2000, **46** (5): 1007-1024
- [14] Ying C M, Joseph B. Performance and stability analysis of LP-MPC and QP-MPC cascade control systems [J]. *AIChE J.*, 1999, **45** (7): 1521-1533
- [15] Nikanrov A, Swartz C L E. Sensitivity analysis of LP-MPC cascade control systems [J]. *Journal of Process Control*, 2009, **19** (1): 16-24
- [16] Muske K R. Steady-state target optimization in linear model predictive control//American Control Conference [C]. Albuquerque, NM, 1997
- [17] Young R E. Petroleum refining process control and real-time optimization [J]. *Control Systems*, 2006, **26** (6): 73-83
- [18] Zou Tao (邹涛), Ding Baocang (丁宝苍), Zhang Duan (张端). MPC: An Introduction to Industrial Applications (模型预测控制工程应用导论)[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2010
- [19] Qin S J, Badgwell A. A survey of industrial model predictive control technology [J]. *Control Engineering Practice*, 2003, **7** (11): 733-764
- [20] Zou Tao (邹涛), Li Haiqiang (李海强), Ding Baocang (丁宝苍), Wang Dingding (王丁丁). Compatibility and uniqueness analysis of steady state solution for multi-variable predictive control system [J]. *Acta Automatica Sinica* (自动化学报), 2013, **39** (5): 519-529