Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation
Shenyang, China, June 29 - July 4 2014

On the Innovated Indirect Method to Determine the Weighted Coefficient Matrix of Data Reconciliation

LUO Xianxi[1,2] ,YUAN Mingzhe[2,3] ,Xia Hong[1], Huang Yongzhong[1], Xu Menghua[1]

1) Jiangxi Province Engineering Research Center of New Energy Technology and Equipment（East China Institute of Technology）, Nanchang,Jiangxi, China(lxxo@sohu.com)

2) Dept. of Information Service & Intelligent Control, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Science, Shenyang,Liaoning, China(mzyuan@sia.cn)

3)Shenyang Institute of Automation, Guangzhou, Chinese Academy of Science, Guangzhou,Guangdong, China

***Abstract*—For the problem of worse performance induced by improper weighted coefficient matrix in data reconciliation algorithm, an innovated indirect method to determine the weighted matrix for data reconciliation is proposed. The method deduces the measurement variances with the estimated constraint residual errors based on the redundancy character. When singular matrix appears in the calculation process of matrix inversion, block matrix together with the known variances from empirical or direct method are applied to compensate the vacant elements of the weighted matrix. Thus the known information is utilized as more as possible to deduce the unknown measurement variances. Compared with the empirical method or direct method, the innovated indirect method shows obvious advantages, and it solves the problem of singular matrix inversion in indirect method. The result of data reconciliation for the flow rate measurement of steam network in an iron& steel corporation shows the method can largely improve the effect of data reconciliation.**

***Keywords*— Innovated, Indirect Method, Data Reconciliation, Weighted coefficient Matrix**

关于改进间接法确定数据协调加权系数矩阵的研究

罗先喜 [1,2]，苑明哲 [2,3]，夏洪 [1]，黄永忠 [1]，徐猛华 [1]

1)江西省新能源工艺及装备工程技术研究中心（东华理工大学），　南昌，江西，中国

2）中国科学院沈阳自动化研究所信息服务与智能控制研究室，沈阳，辽宁，中国

3）广州中国科学院沈阳自动化研究所分所，广州，广东，中国

摘　要　针对数据协调算法中加权系数矩阵确定不当导致数据协调效果变差的问题，提出一种改进的间接法以确定加权系数矩阵。该方法利用管网的空间冗余特性，通过估算约束残差的方差反推各被测变量的方差。当计算过程中出现奇异矩阵时，则采用分块矩阵的方法，用经验法或直接法获得的方差填补加权系数矩阵中对应的元素，从而最大可能利用已知信息推算出需要确定的测量方差。同经验法或直接法相比，改进的间接法有明显的优势，同时解决了间接法求加权系数矩阵时矩阵奇异的问题。在钢铁企业蒸汽管网流量数据协调中应用的结果表明，本文的方法能显著改善数据协调的效果。

关键词　改进，间接法，数据协调，　加权系数矩阵

1．引言

由于工业过程规模扩大，工艺更加复杂，对生产信息化与操作智能化的要求日益提高。工业过程大量采集的数据不可避免存在数据问题。及时发现并校正这些问题数据，是保障生产系统正常运行的重要条件。

中科院知识创新工程项目（KGCX2-EW-104-3)江西省基金项目（资助号：20114BAB201024、GJJ13466、GJJ13467）支持

自 Kuhn 于 1961 年提出基于最小二乘的数据协调模型之后，人们在数据校正的理论，如:显著误差检测、数据协调、非线性数据协调、动态数据协调取得了一系列的研究成果[1]。这些成果大多是基于最小二乘最优估计的方法。有些研究则采用最大似然估计、Bayesian 估计等方法。研究与实践证实这些方法难以全面适应生产过程中测量误差非正态分布、系统动态、非线性等问题。最新的研究试图

978-1-4799-5825-2/14/$31.00 ©2014 IEEE

改换思路，如文献[2]针对传统方法中认为误差服从正态分布，且方差协方差阵固定不变的问题，指出工程中实际变量的变化是双边有界的，提出一种基于双边约束的近似正态分布的数据协调与显著误差检测的方法。文献[3, 4]采用支持向量回归和扩展支持向量回归的方法，同时考虑到了测量显著误差和物料质量运动丢失的信息，使数据校正技术的适应性更强。文献[5]考虑到实际测量值的分布不一定是正态分布、并且传统的数据协调对于过程泄漏难以定位的问题，采用了通用化 T 分布(Generalized T Distribution,GT)模型拟合测量误差分布，并采用扩展的赤池信息准测(Akaike Information Criterion,AIC)定位包括非线性稳态过程在内的过程泄漏。以上所提及的关于数据协调或显著误差检测的方法，都牵涉到确定测量方差－协方差的问题。如果方差－协方差的值不能正确估计和设定，其数据校正的效果必然受到影响。

文献[6]针对数据协调中显著误差的传播问题，提出添加基于测量值比例关系上下限的约束条件,并利用罚函数对含有显著误差的测量值给予较大的协调量，以减小显著误差对数据协调结果的影响，其实质相当于增大了含有显著误差的变量的方差。但是确定含有显著误差的变量、确定罚函数或调节方差的问题没有明确解决。文献[7] 提出了待测状态未知且时变情况下多传感器测量方差的估计方法，并针对环境干扰进一步提出了加窗方差估计方法，用于对多传感器测量方差的实时自适应估计。该方法要求有大量的测量硬件冗余，且要求的条件较为苛刻，在实际中较难满足。文献[8]基于空间冗余的思想，利用过程平衡约束方程和约束残差的统计特性，估算系统的方差－协方差矩阵，即所谓的间接法的思想，从而避免了过于依赖经验方法对数据协调的影响。文献[9]在此基础上还针对非线性和双线性问题，提出了方差－协方差矩阵的估算方法和应用方案。更深入的研究却发现，这种方法可能存在奇异，难以取得合理的方差－协方差计算结果。文献[10]从数学的角度按广义逆解线性方程组的 3 种约束情况及算法，推导了秩亏自由网平差（平差算法与数据协调类似）的计算公式，从理论的角度解决在求解过程中矩阵不可逆时的方案推进问题。由于纯数学的解决方式，在实际应用中会出现明显不合理的结果，难以在工程实际中应用。文献[11]另辟蹊径，采用基于数据驱动的主元分析法(Principle Component Analysis, PCA)，利用带有干扰的数据进行模型辨识及方差－协方差矩阵的估算。这种方法对采集到的数据需要符合一定的条件，尤其当系统变量在较大范围变化时，非线性的影响会使性能恶化。

由此可见，正确实时地估算各被测变量的方差，是取得理想数据协调效果的前提条件，而当前所提出的方差-协方差估算方法在工程实践中受到应用条件的制约。本文研究了基于空间冗余思想确定系统的方差－协方差矩阵，即加权系数矩阵的方法。针对可能存在奇异矩阵使方法无法正常实施的问题，提出了一种解决方案。

2.数据协调的模型与相关概念

如果把流程工业中某生产过程的测量模型记为：

$$Y = X + E \tag{1}$$

式中，$Y \in R^{n\times1}$ 为被测变量的测量值向量，$X \in R^{n\times1}$ 为被测变量的真实值向量，$E \in R^{n\times1}$ 为测量误差向量。引入向量 $U \in R^{m\times1}$ 代表未测量变量的真实值。假设本过程的测量模型满足 4 个条件：过程处于稳态、测量线性无关、没有显著误差存在(e 服从正态分布)，且变量之间为线性约束关系。那么根据过程物料与能量平衡，这些变量满足特定的约束条件，将其记为：

$$F(X,U) = 0 \tag{2}$$

由于测量值中含有误差，用测量值 $Y \in R^{n\times1}$ 替代真实值 $X \in R^{n\times1}$，式(1-2)不一定成立。因此 Kuehn 和 Davison[12]提出数据协调的问题：满足物料平衡和能量平衡的约束条件下，使对过程变量的估计值和测量值偏差的平方和最小。

设已测变量的估计值记为 $\hat{X}$，未测量变量的估计值记为 $\hat{U}$。由于是线性约束，(2)可以写成：

$$A\hat{X} + B\hat{U} + C = 0 \tag{3}$$

目标是使以下函数取得最小值：

$$J = (\hat{X} - Y)^T Q^{-1} (\hat{X} - Y) \tag{4}$$

式中，$A \in R^{k\times n}, B \in R^{k\times m}$ 分别为系数矩阵，$C \in R^{k\times1}$ 为常数项矩阵，k 为约束方程的个数。

$Q \in R^{n\times n}$ 称为加权系数矩阵。

这是一个线性约束下最优估计问题。对流程简单的系统，直接使用 Largrange 乘子法求解即可得到最后的调整值。但是对于复杂的系统，则需要对数据分类和流程分解。

根据 Crowe[13]提出的矩阵投影法，消除未测量值的影响。由此得到：

$$\hat{X} = Y - QA^T (AQA^T)^{-1} AY \tag{5}$$

$$\hat{U} = (B^T Q^{-1} B) B^T Q^{-1} Y \tag{6}$$

在满足物料或能量平衡约束条件下，求取被测量变量真实值的估计值，使估计值与测量值之差的加权平方和最小的数据处理方法称为数据协调。利用测量值对未测量变

量(或丢失数据)U 进行估计的过程，称为参数估计。在实际测量系统中，有些仪表的传感器、变送器存在定向偏差，或受到固定的干扰，一般将这种偏差或干扰引起的测量偏差称为显著误差，定位并去除显著误差的过程称为显著误差检测。数据协调、参数估计和显著误差检测统称为数据校正[1]。

3.确定加权系数矩阵 Q 的方法

由式(5) (6)可知，数据协调算法中采用的加权系数矩阵直接影响到数据协调的结果。数据协调算法推荐的最小二乘加权系数矩阵 Q 为测量数据的方差－协方差矩阵。当不同测量仪表随机误差相互独立时，测量变量的随机误差的协方差期望值为零，Q 为对角阵，其对角元素为各测量变量随机误差的方差值。因流量仪表的环境、工作条件和流量值范围变化，都会引起测量方差发生改变。在数据协调中，实时估算测量变量的方差和调整加权系数矩阵，才能有效提高数据质量。

针对本文数据协调中确定各测量变量的方差问题，可采用的简单方法包括经验法、直接法，有文献提出间接法[14]。但是经验法和直接法存在明显缺陷，而间接法无法解决奇异矩阵求逆的问题。下面介绍经验法、直接法和改进的间接法确定加权矩阵的方法。

(1)经验法

针对不同来源的数据，首先根据经验确定测量数据相对于真实值的相对误差 R，再按照被测量变量真实值的无偏估计(平均值)估计各测量数据相对于真实值的偏差大小，即确定了矩阵 Q 中的元素。

即，设系统所获得第 i($1 \le i \le n$，n 为管网测量系统中的数据源总数)个流量值的相对误差为 R_i：

$$R_i = \frac{Y_i - X_i}{X_i} \tag{7}$$

Y_i 为第 i 个流量变量的测量值(或认证值、计算值，为便于论述，不作区分，统一称为测量值)，X_i 为第 i 个流量的真实值。

测量值的相对误差由仪表本身的质量决定；认证值的相对误差由认证模型的精度和用于认证的变量精度决定；计算值的相对误差由管网模型精度决定，且受到工况变化和环境等因素的影响。

则加权系数矩阵 Q 直接可以确定为：

$$Q = diag(q_{11}, \dots q_{ii}, ..., q_{nn}) \tag{8}$$

式中，$q_{ii} = (R_i X_i)^2$ ，$1 \le i \le n$ (9)

实际应用中，操作人员对不同来源数据的相对误差会形成一定的人工经验。因此，根据仪表精度和人工经验设定 R_i 的方法在数据协调软件中较普遍。

经验法具有计算简单、易于掌握的特点，但由于 R_i 是按仪表精度或人工经验数据设定为常数，而实际的数据的相对偏差会随着被测量变量的变化，导致 Q 中元素与其定义值偏差较大，直接影响数据协调的效果。

(2)直接法

加权系数矩阵 Q 的每个元素，都有明确的定义。在系统处于完全稳定状态，各测量误差之间相互独立，且满足正态分布时，可以直接利用时间冗余计算样本数据方差和协方差，以确定 Q 阵中的每个元素。

1)对角线元素定义为各变量的方差，即有：

$$q_{ii} = \mathrm{var}(X_i) = \frac{1}{K-1}\sum_{i=1}^{K}(X_{ik} - \bar{X}_i)^2 \quad (1 \le i \le n) \tag{10}$$

式中 $\bar{X}_i$ 为测量变量 X_i 在统计时间段的平均值。K 为统计时间段的样本容量。

2)非对角线元素定义为不同测量变量的协方差。即有：

$$q_{i,j} = \mathrm{var}(X_i, X_j) = \frac{1}{K-1}\sum_{i=1}^{K}(X_{ik} - \bar{X}_i)(X_{jk} - \bar{X}_j)$$
$$(1 \le i \le n, 1 \le j \le n, i \ne j) \tag{11}$$

式中 $\bar{X}_j$ 为测量变量 X_j 在统计时间段的平均值。如前所述，在认为不同流量变量相互独立时，$q_{i,j} = 0 (i \ne j)$。得到的加权系数矩阵 Q 如式(10)。

样本数据的方差和协方差是总体方差和协方差的无偏极大似然估计，但从式(11)可知，计算时用平均值代替了真实值，即管网中蒸汽流量的变化也会导致方差的计算值发生变化，无法正常反映该数据源在流量测量(或估算)中的实际偏差，因此直接法有明显的缺陷，在实际数据校正软件中很少使用。

(3)间接法

间接估计的方法，是利用测量数据代入管网约束方程后产生的约束残差反推各测量变量的方差，即利用测量变量的空间冗余推算 Q 阵[14]。具体的估算方法如下：

针对如式(3)的平衡约束方程，设其流量测量(包括直接测量值、认证值和计算值)值向量为 Y，真实值向量为 X，且已去除了显著误差。则随机误差向量记为：

$$\varepsilon = Y - X \tag{12}$$

则约束残差为： $r = AY - \delta = A\varepsilon$ (13)

假定测量值中的显著误差已全部去除，则有：

$$E(r) = AE(\varepsilon) = 0 \tag{14}$$

约束残差的方差－协方差矩阵为：

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(r) &= E[(r-E(r))(r-E(r)^T] \\ &= E(rr^T) = AE(\varepsilon\varepsilon^T)A^T = AQA^T\end{aligned} \tag{15}$$

令：
$$\operatorname{var}(r) = H \tag{16}$$

按照统计的方法估计矩阵 H，即有：

$$H = \frac{1}{K-1}\sum_{i=1}^{K} r_i r_i^T \tag{17}$$

式中，K 为统计时间段的样本容量。式(14)表明，约束残差的期望值都为零(注：约束方程是按节点列写，约束残差其实就是节点流量，在考虑管网泄漏和冷凝时，根据物料平衡节点流量为零)。这比直接法中用测量平均值作为期望值计算方差更精确合理。

由式(15)(16)(17)：

$$H = AQA^T = \frac{1}{K-1}\sum_{i=1}^{K} r_i r_i^T \tag{18}$$

要求根据 H，反推出 Q。针对如式(18)的方程，可以将其写成使用 Kronecker 矩阵乘积和向量化算子(即式中的 vec)的形式[15]：

$$vec(H) = (A \otimes A)vec(Q) \tag{19}$$

当 Q 为对角阵时(即假定各被测变量的误差是相互独立)，非对角线元素全为零。可以证明：

$$(A \otimes A)vec(Q) = (A_1 \otimes A_1, A_2 \otimes A_2, \ldots, A_n \otimes A_n)Q_d \tag{20}$$

其中，$A \in R^{m \times n}$，$A_i (1 \le i \le n)$ 为矩阵 A 的列向量，Q_d 为矩阵 Q 的对角元素组成的列向量，即有：

$$Q_d = (q_{11}, q_{22}, ..., q_{nn})^T, Q = diag(Q_d) \tag{21}$$

式(19) (20)可以写成

$$vec(H) = DQ_d \tag{22}$$

其中的矩阵 D 为矩阵 A 中各相同列的 Kronecker 积，即：

$$D = \begin{pmatrix} a_{11}A_1 & a_{12}A_2 & \cdots & a_{1n}A_n \\ a_{21}A_2 & a_{22}A_2 & \cdots & a_{2n}A_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}A_m & a_{m2}A_2 & \cdots & a_{mn}A_n \end{pmatrix} \tag{23}$$

式中，$a_{ij} (i \le 1 \le m, 1 \le j \le n)$ 为矩阵 A 中的第 i 行和第 j 列元素。

由此可推出 Q_d 的估计：

$$Q_d = (D^T D)^{-1} D^T vec(H) \tag{24}$$

显然，要求得 Q_d，$D^T D$ 的逆矩阵必须存在或为满秩(方阵)。但该矩阵的秩实际上取决于矩阵 A，即系统的结构特点，很多系统并不满足这一条件。这是间接法面临的最大困难。

结合线性方程求解的知识发现，式(22)无法求解的最主要原因是 $vec(H)$ 中含有的信息不足以反推出 Q_d。如果 Q_d 中部分元素已知，就可能结合(22)求出 Q_d 中未知的元素，这就是经过改进的间接法确定方差－协方差矩阵的基本思想。

4.改进的间接法确定加权矩阵具体步骤

第一步，根据经验法或直接法得到测量值方差的稳定性和可信任的程度，按从低到高排序，形成对应顺序的测量值向量 Y 和 Q_d，对应的调整关联矩阵 A 和约束方程。其目的是尽量提供可以信任的测量方差协助求解不稳定和可信任度低的方差值。

第二步，依式(18)求得 H 和 $vec(H)$；

第三步，依式(23)求得 D；

第四步，判断 $D^T D$ 是否为满秩，如果是满秩，则直接转第六步；如果不是满秩，将 D 和 Q_d 看成分块矩阵：

$$D = (D_1, D_2), \quad Q_d = (Q_{d1}, Q_{d2})^T \tag{25}$$

使其中 D_1 的列与 Q_{d1} 的行数相等，且 D_2 的列与 Q_{d2} 的行都为 1。式(22)可以写成：

$$vec(H) - D_2 Q_{d2} = D_1 Q_{d1} \tag{26}$$

第五步，将经验法或直接法得到对应变量的方差代入 Q_{d2}，分别用 $vec(H) - D_2 Q_{d2}$ 代入 $vec(H)$，D_1 代入 D，Q_{d1} 代入 Q_d，形成新的式(22)。转第四步。

第六步，按照式(24)求解出方差矩阵中未知的对角元素，检查各元素的合理性。合并作为已知的方差值和间接法估算值得到完整的 Q_d，输出方差矩阵 Q。

5.改进间接法与其他方法的比较

间接法的原理是基于约束残差的方差对 Q 阵进行实时估计，利用了的管网的关联矩阵和空间冗余特性。在约束残差的方差信息不足以推算出各被测变量的方差时，提供部分按经验或直接法获得的值得信任的方差，对矩阵 D 逐次降阶，直到矩阵 $D^T D$ 可逆为止。从而确定了 Q 阵中各对角线的元素。这就是改进的间接法。

与经验法和直接法相比，改进的间接法有明显的优势：

(1)采用约束残差的方差推导测量变量的方差，充分利用了测量网络的空间空余特性，信息更全面。而经验法和直接法是对每个变量的方差作单独估算，没有考虑空间冗余特性对方差分布的影响。

(2)约束残差的期望值确定为零，比采用直接法时受到管网流量波动严重影响而获得的方差更精确。和经验法相比，确定方差的过程更科学。

(3)改进之后的间接法，通过逐次降阶的方法克服了 $D^T D$ 的逆矩阵不存在时的困难，最大可能利用了冗余信息；同时也能采纳经验法和直接法中得到的可信任的方差值，因此这种方法的实用性好。

间接法在求约束残差的方差协方差阵时，同样受样本的质量和数值计算精度的影响，按式(24)得到的矩阵元素中可能会出现一些异常大或为零的特殊情况。此时，也需要对 Q 阵中相应的元素作修正。

虽然改进的间接法计算比较复杂，但是并不需要每次判断矩阵的降阶和满秩。管网及流量计的分布一旦确定，矩阵 A 就不再变化，$D^T D$ 到满秩的阶数就相应确定，对应的计算过程得到简化。

6.不同方法确定加权系数据矩阵时数据协调对比

为了验证以上方法，针对国内某钢铁企业的蒸汽管网的流量数据校正问题做了算法验证。该蒸汽管网的结构如图 1 所示。图中箭头上的数字代表该管道支路的编号，箭头的方向代表蒸汽的流向；圆圈内数字代表蒸汽管网的节点编号；虚线框圈住的部分为蒸汽管网的主管道。

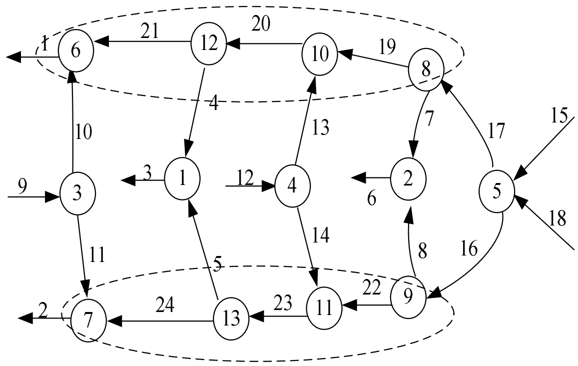

图 1：国内某钢铁公司蒸汽管网结构图

表中真实值是按照管网计入损耗时的流量平衡方程，并结合实际生产中的流量值的范围而设定，并将各条支路蒸汽到达各节点处时产生蒸汽流量总损耗设为 0.05 吨/小时。测量值为该时间段某一时刻各条支路的测量值。

表 1 列出了蒸汽管网各支路的真实值、测量值、经验法数据协调、改进间接法数据协调的计算结果。其中，采有改进间接法数据协调时，根据对矩阵 A 的分析，发现要使 $D^T D$ 满秩，必须降阶到 17×17，有 7 个变量的测量方差需要采用经验法的值，见表 1。直接法因实际中很少应用，在这里不作对比。

表 1 蒸汽管网流量数据协调实例数据

支路	真实值	测量值	q_{ii} 经验	协调值	q_{ii} 间接	协调值
1	4.85	6.04	0.06	5.9309	1.25	5.2294
2	4.85	3.24	0.06	3.3649	1.25	3.7610
3	49.95	49.93	6.25	49.9794	2.55	49.9525
4	25.00	23.05	1.56	24.5271	1.56	24.8205
5	25.00	26.02	1.56	24.9523	1.56	25.2720
6	59.90	60.76	9.00	60.5230	2.25	60.3314
7	29.95	29.95	2.25	30.0050	2.25	30.5708
8	30.00	29.93	2.25	30.0370	2.25	29.9705
9	30.05	27.56	2.25	29.3258	3.25	29.5094
10	15.00	15.58	0.56	15.4060	0.56	15.2479
11	15.00	12.81	0.56	13.0698	3.56	13.2116
12	40.05	37.73	4.00	40.1934	4.83	39.9576
13	20.00	20.08	1.00	19.8093	0.56	19.8648
14	20.00	19.05	1.00	20.3341	0.85	19.8428
15	20.05	20.46	1.00	20.3181	0.84	20.7406
16	25.05	25.73	1.56	25.1002	1.56	25.5892
17	25.00	25.86	1.56	25.1786	1.56	24.7080
18	30.05	29.36	2.25	29.7107	2.25	30.1066
19	5.00	5.45	0.06	5.4074	0.64	5.4128
20	14.95	15.05	0.56	14.3519	0.56	14.4020
21	10.10	10.93	0.25	10.2251	0.25	10.4685
22	5.00	5.54	0.06	5.3868	1.83	4.7714
23	14.95	15.85	0.56	15.0973	1.25	15.2214
24	10.10	9.97	0.25	9.9550	2.54	10.1006

注：1.按照图 1 所示的蒸汽流向，表中的支路 19、22、24 应取负值，在此简写为正值。

2.表中的 q_{ii} 为加权系数矩阵 Q 的对角线元素，由于实际管网分布广，数据来源相对独立，Q 可以近似看成对角阵。

图 2 标明了 24 条蒸汽管道的测量值与真实值、协调值与真实值之间的绝对误差的对比情况。从图中可以看出：

采用经验法确定 Q 时，共有 19 条支路的数据协调值绝对误差比测量绝对误差小(即方法 2 中黑斜体字表示的支路)。由此可见，数据协调能改善流量测量数据的质量。

采用改进的间接法确定 Q 阵时，在所有 24 条支路中共有 17 条支路的绝对误差比较小，数据协调效果较方法 2 有所提高。还可以看出，对于测量误差较大的 1、2、4、9 号支路，间接法得到的数据协调值能做出较大幅度调整，使误差明显减小。

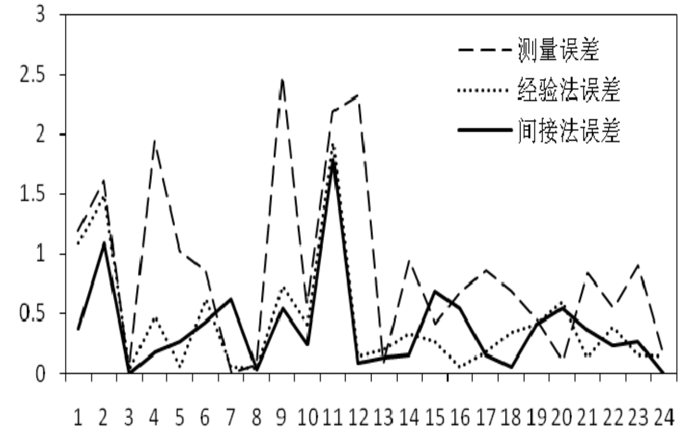

图 2：流量测量与数据协调值的绝对误差对比

7.结论

数据协调的效果与加权系数矩阵的选择关系密切。数据协调的加权系数矩阵一般选用测量数据的方差-协方差矩阵。该矩阵可以采用经验法、直接法和间接法估算。经验法将矩阵设置为常数虽简便快捷，当工况变化时效果欠佳；直接法虽然能在线调整，但是流量波动对样本方差和协方差值估计影响很大，实际中并不适用；普通的间接法，则可能因出现奇异矩阵而无法继续的问题。

采用改进之后的间接法，利用管网的空间冗余特性，通过估算约束残差的方差反推各被测变量的方差，且在 $D^T D$ 的逆矩阵不存在时，借助于经验法和直接法获得的方差信息对 D 降阶，最大可能利用已知信息推算出需要确定的测量方差。通过在某钢铁公司蒸汽管网中应用比较，发现改进的间接法比经验法或直接法更合理，对数据质量的提高效果明显，同时也避免了出现奇异矩阵使该方法失效的问题，表现出很好的实用性。

参考文献

[1] 李红军，秦永胜等, 化工过程中的数据协调及显著误差检测. 化工自动化及仪表, 1997. 24（2）: p. 25-32.

[2] YuHong Zhao, Z.S. Steady Data Reconciliation and Gross Error Detection Based on The Assumption of Bounded Error Distribution[C]. in the Third International Conference on Machine Learning and Cybernetics. 2004. Shanghai, China.

[3] Yu Miao, e.a., Support Vector Regression Approach for Simultaneous Data Reconciliation and Gross Error or Outlier Detection. Industrial & Engineering Chemistry Research, 2009. 48: p. 10903-10911.

[4] Hongren Zhan., Y.M.a.W.W. Plant-wide Mass Balance using Extended Support Vector Regression based Data Reconciliation and Gross Error Detection[C]. in the 2010 International Conference on Modelling, Identification and Control. 2010. Okayama, Japan.

[5] Liyong Xiao., Y.M.a.H.S. Data Reconciliation with Simultaneous Bias and Leak Estimation Based on Generalized T Distribution and Akaike Information Criterion[C]. in the 2011 4th International Symposium on Advanced Control of Industrial Processes. 2011. Hangzhou, China.

[6] 李津蓉，戴连奎, 一种新的数据协调模型及显著误差检测[J]. 浙江大学学报(工学版), 2003. 37(6): p. 693-697.

[7] 仲崇权，董西路等, 多传感器测量中的方差估计[J]. 数据采集与处理, 2003. 18(4): p. 412-417.

[8] Wu Shengxi., Z., etal Estimation of Measurement Error Variances/Covariance in Data Reconciliation[C], in the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. 2008: Chongqing, China. p. 714-718.

[9] 吴胜昔，赵霞等, 数据协调中测量数据方差－协方差估计及过失误差序列补偿算法[J]. 控制理论与应用, 2008. 25(4): p. 717-722.

[10] 程功，葛燕飞, 广义逆矩阵在测量平差中的应用[J]. 长春工程学院学报(自然科学版), 2009. 10(3): p. 86-88.

[11] Narasimhan, S., Shah, Sh L., Model identification and error covariance matrix estimation from noisy data using PCA[J]. Control Engineering Practice, 2008. 16(1): p. 146-155.

[12] Kuhn, D.R., H.Davidson, Computer Control II:Mathematics of Control. Chem. Eng.Prog., 1961: p. 57.

[13] Crowe, C.M., Y.A.Garcia, Reconciliation of Process Flow Rates By Matrix Projection. AIChE Journal, 1983. 29: p. 881.

[14] Shengxi W., X.Z. Estimation of measurement error variances/covariance in
data reconciliation. in World Congress on Intelligent Control and Automation. 2008. Chongqing, China.

[15] 董增福, 矩阵分析教程. 2010, 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社.