

# 预测控制模型病态问题的分析与校正

潘昊<sup>1,2</sup>，于海斌<sup>1</sup>，邹涛<sup>1</sup>，王丁丁<sup>1</sup>

(1. 中国科学院沈阳自动化研究所，沈阳，110016

2. 中国科学院大学，北京，100039

**摘要：**模型病态是预测控制过程中一个常见的问题，本文从过程的稳态模型出发，提出了模型病态问题会导致输出静差，控制器鲁棒性下降，且模型病态性是否表现出来与输出移动方向存在相关性的观点，并利用几何工具与SVD分析了模型病态对控制产生影响的本质原因，同时提出了一种离线的模型修正策略，该策略与现存的在线策略配合使用可以很好的解决模型病态的问题，并用仿真验证了文中提出的观点。

**关键词：**预测控制；模型病态问题；奇异值分解；模型辨识；模型失配

**中图分类号：** TL361

**文献标识码：** A

## Analysis and Correction of Ill-conditioned Model in Model Predictive Control

PAN Hao<sup>1,2</sup>, YU Hai-bin<sup>1</sup>, ZOU Tao<sup>1</sup>, WANG Dingding<sup>1</sup>

(1. Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Science, Shenyang 110016, China

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China

**Abstract :** Ill-conditioned model is a common problem in model predictive control, in this paper, we have come up with a conclusion that an ill-conditioned model in controller may lead to offset and decrease controller's robustness, and we believe that controlled outputs' move direction is a key factor about whether the ill-conditioned model will have a negative effect on controller's performance. Geometry tools and SVD in linear algebra is used to discover the reason of the mentioned phenomenon, and an offline strategy is proposed to resolve the ill-conditioned model problem, simulation examples are used to verify the conclusion included in this paper.

**Key words :** model predictive control; model ill-conditioned problem; singular value decomposition (SVD); model identification; model mismatch

### 1 引言

模型预测控制(MPC)是一种基于模型的有约束，多变量控制方法，最初被应用于炼油过程的控制<sup>[1]</sup>，由于MPC能够显著的降低被控过程输出的方差，鲁棒性强等特点，目前已在石油，化工，造纸，

食品加工，航空等主要行业得到了充分的应用<sup>[2]</sup>。MPC的经典算法主要包括动态矩阵控制(Dynamic Matrix Control, DMC)<sup>[3]</sup>，模型算法控制(Model Algorithmic Control, MAC)<sup>[4]</sup>，广义预测控制(Generalized Predictive Control, GPC)<sup>[5]</sup>，目前在工业

**收稿日期：** - 年 - 月 - 日；**修回日期：** - 年 - 月 - 日。

**基金项目：** 国家自然科学基金(61374112)；中国科学院重点部署项目(KGZD-EW-302)。

**作者简介：** 潘昊，1986年出生，男，籍贯内蒙古阿拉善左旗，博士研究生，从事先进过程控制，系统建模与仿真的研究；于海斌，男，1964年生，工学博士，研究员、博士生导师，主要研究工业自动化及工业无线传感器网络。

过程中应用最为广泛的是 DMC 算法。MPC 算法的基本原理分为模型预测，滚动优化，以及反馈校正三部分，在每个控制周期开始，利用可测的反馈输出值校正初始预测输出值，然后利用内置的控制器模型对输出在未来输入作用下的值进行预测，并在滚动优化环节通过极小化性能指标求出控制作用。

众所周知，MPC 是一种基于模型的控制方法，而控制器的模型通常是通过系统辨识得到，且模型的质量对于最终控制效果的好坏有很大的影响，本文关注的是控制器模型存在病态情况下的 MPC 控制。所谓的模型病态，直观的表现是在过程模型的条件数很大，输出存在很强的相关性，控制显得比较困难。控制器模型的病态可以分为以下两种情况：

1.过程本身存在强相关性<sup>[6]</sup>，物理上就是一个病态的过程，如化工过程中常见的蒸馏塔单元，就是一个典型的病态过程。2.由于多变量过程的模型是通过系统辨识得到的，因此由输入输出数据拟合出的模型的子单元可能存在病态的情况。

模型病态问题在过程控制中比较常见<sup>[7]</sup>，且对于过程的稳定性有很大的影响，对于向某一方向移动的输出，很可能导致剧烈的控制器动作，因此需要在实施 MPC 项目的过程中消除模型病态对于过程的影响。

对于方系统（输入个数与输出个数相等），Grosdidier P<sup>[8]</sup>等提出将存在线性相关的一个或多个输出移除，在滚动优化环节，不参与控制作用的计算，但种方案会导致输出端静差的出现。另外一种解决方法是利用输出的区间控制策略（即对某些输出放松其控制要求，不要求将输出控制到一个固定的设定值，而是将输出控制到某一个给定的区间）。这种方法在本质上与前面提到的移除某些输出不参与滚动优化的方法是一致的，但是适用于对输出要求不高的过程，在实际控制中应用地比较广泛。美国学者 J.Marroquin<sup>[9]</sup>等基于标准正规化理论在解决模型病态问题中的局限性，提出了一种新的随机方法处理数值计算中的模型病态问题。另外，在霍尼韦尔推出的先进控制软件中，采用了 SVT<sup>[10]</sup>(Singular Value Thresholding)方法来消除模型的病态性对控制的影响，其基本原理是根据控制器配置时设定的奇异值阈值，如果模型存在病态性，忽视小于阈值的奇异值对应方向上输入的移动，从而避免了可能导致过程不稳定的输入动作。而在 AspenTech 的先进控制软件 DMCplus 中，对于模型病态性问题采取的控制策略是 IMS(Input Move

Suppression)方法，这种策略直接增大最小二乘问题中要求逆的对角元素的值，直接降低条件数，即让输入的动作直接变小，但是这种策略之所以有效是因为在 DMCplus 中采用的是一种双层结构<sup>[2,11-12,19]</sup>的预测控制器。上述的方法都是在线的解决策略，本文提出一种离线的处理模型病态问题的策略，作为一种补充方法，与上述在线方法配合使用，可以很好的处理模型病态性问题。

本文将从过程稳态入手，利用模型的增益矩阵，利用几何与线性代数工具分析模型病态会影响控制的原因，并提出相应的模型改进方法，并用仿真验证了所给方法的有效性。

## 2 预测控制算法

由于 DMC 算法在工业过程中使用的广泛性，在这里以 DMC 算法为代表简要介绍预测控制算法的基本原理。

**预测模型:** 假设  $m$  个控制输入  $u$  未来依次有  $M$  个增量变化，则可得  $p$  个被控输出  $y$  在未来  $P$  个时刻的预测值为

$$\tilde{y}_{PM}(k) = \tilde{y}_{p0}(k) + A\Delta u_M(k) \quad (1)$$

其中， $P$  是预测时域， $M$  是控制时域， $A$  是由相应的阶跃响应系数组成的预测矩阵， $\tilde{y}_{p0}$  是没有控制输入作用时的初始输出预测值， $\Delta u_M(k)$  是由  $M$  步控制作用组成的控制输入，而  $\tilde{y}_{PM}(k)$  是在  $M$  步控制作用下得到的未来  $P$  时刻的预测输出，且

$$\tilde{y}_{PM}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{1,PM}(k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_{p,PM}(k) \end{bmatrix}, \tilde{y}_{p0}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{1,p0}(k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_{p,p0}(k) \end{bmatrix}$$

$$\Delta u_M(k) = \begin{bmatrix} \Delta u_{1,M}(k) \\ \vdots \\ \Delta u_{m,M}(k) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pm} \end{bmatrix}$$

**滚动优化:** 在滚动优化过程中，在每一个执行周期中都通过极小化如下性能指标计算控制增量

$$J(k) = \|\mathbf{w}(k) - \tilde{y}_{PM}(k)\|_Q^2 + \|\Delta u_M(k)\|_R^2 \quad (2)$$

其中， $\mathbf{w}(k) = \begin{bmatrix} w_1(k) \\ \vdots \\ w_p(k) \end{bmatrix}$  为设定值向量， $Q, R$  为相应的加权系数矩阵，计算得到的最优控制增量如下，

$$\Delta u_M(k) = (A^T Q A + R)^{-1} A^T Q [\mathbf{w}(k) - \tilde{y}_{p0}(k)]$$

而即时增量可由下式计算,

$$\Delta u(k) = LD[w(k) - \tilde{y}_{p0}(k)] \quad (3)$$

其中  $D = (A^TQA + R)^{-1}A^TQ$ , 需要注意, 这里控制只取第一步的控制作用, 即

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \\ & & 0 & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

**反馈校正:** 在  $k$  时刻控制作用实施后, 可以得出在此控制输入作用下  $k+1$  时刻的输出预测值, 而通过  $k+1$  时刻的实际测量值, 即可得到相应的误差向量  $e$ , 其中

$$e(k+1) = \begin{bmatrix} e_1(k+1) \\ \vdots \\ e_p(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(k+1) - \tilde{y}_{1,1}(k+1|k) \\ \vdots \\ y_p(k+1) - \tilde{y}_{p,1}(k+1|k) \end{bmatrix}$$

利用此误差向量可以得到校正后的输出预测值, 即

$$\tilde{y}_{cor}(k+1) = \tilde{y}_{N1}(k) + He(k+1) \quad (4)$$

其中  $H$  为误差校正矩阵, 由于对误差形成的原因缺乏了解, 通常只保留  $H$  的主对角块, 这意味着仅仅利用输出自身的误差修正其输出预测值, 误差项的引入使算法最大程度的利用了实际输出的信息, 快速的修正输出的预测值, 很好的增强了算法的鲁棒性, 接着利用移位矩阵  $S$ , 便可得到下一时刻的初始预测值, 即

$$\tilde{y}_{N0}(k+1) = S\tilde{y}_{cor}(k+1) \quad (5)$$

其中,  $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}$ ,  $N$  为

建模时域, 也可以称为模型截断时域。

### 3 现象观察

在完成模型辨识的工作后, 通常会得到输入输出的阶跃响应系数模型, 因此很容易得到包含过程稳态增益信息的稳态增益系数矩阵, 这里以

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1} & \cdots & g_{pm} \end{bmatrix}$$

表示,  $m, p$  分别表示系统的输入与输出个数, 本文提出的策略即是在将辨识得到的模型作为控制器模

型投运之前, 对模型及其子单元 ( $2 \times 2$  矩阵) 进行奇异性检验<sup>[13-15]</sup>, 若模型存在病态问题, 则校正模型并更新, 即可避免模型存在的病态问题。

在此, 首先对模型病态对于控制的影响状况进行分析。假定一个过程的子单元模型为:

$$G_{model} = \begin{bmatrix} \frac{-12.62}{50s+1}e^{-27} & \frac{9.84}{60s+1}e^{-28} \\ \frac{9.84}{50s+1}e^{-18} & \frac{-6.88}{60s+1}e^{-14} \end{bmatrix}$$

则其稳态增益矩阵为

$$G_{model\_gain} = \begin{bmatrix} -12.62 & 9.84 \\ 9.84 & -6.88 \end{bmatrix}$$

可以很容易得到其条件数为 40, 是一个病态的模型。众所周知, 如果模型是病态的, 那么输出的移动会引起很大的输入动作, 但是在实际中执行机构 (如阀门) 往往存在物理上的硬限, 或者需要考虑非线性区域, 因此执行机构需要在一个约束区间内工作, 若模型存在病态导致控制器动作很大, 则有可能导致执行器卡死在边界, 以致输出无法达到设定点, 出现静差。我们用上述模型来验证这个观点:

给定设定点  $\Delta y = \begin{bmatrix} -1.6 \\ -1.2 \end{bmatrix}$ , 权系数矩阵  $Q, R$  均为 1,

输入硬约束设为  $[-0.5, 0.5]$ , 其输入输出曲线如下图所示:

从图中可以看到输出最终稳定在  $\begin{bmatrix} 0.1430 \\ -1.4855 \end{bmatrix}$ ,

而两个输入均卡在约束的边界上。

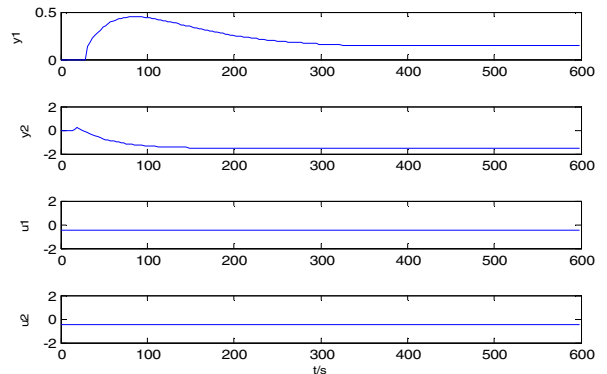


图 1 输入输出曲线: 第一组设定点

再给一组设定点  $\Delta y = \begin{bmatrix} -1.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}$ , 权系数矩阵  $Q, R$  均

为 1, 输入硬约束仍为  $[-0.5, 0.5]$ , 其输入输出曲线如下图所示:

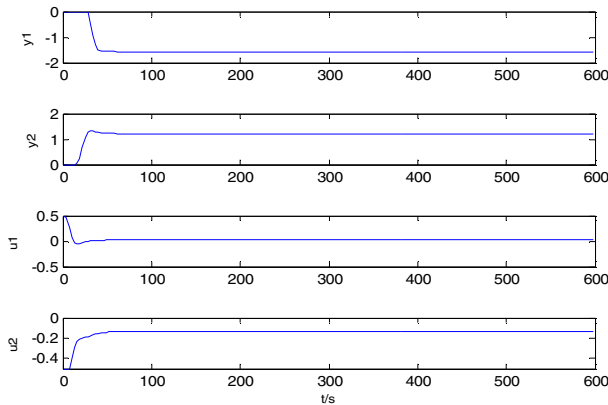


图 2 输入输出曲线: 第二组设定点

我们可以看到, 输出最终稳定在  $\begin{bmatrix} -1.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}$ , 过程

很快就达到了设定点, 同样的病态模型, 对于两组不同的设定点, 控制器的动作截然不同, 且控制效果也相去甚远, 而我们可以注意到, 仅仅是输出的移动方向发生了变化, 产生这种现象的原因我们会在随后进行分析。

同时, 模型失配的情况在实际中是非常普遍的, 模型失配的原因可能来自于辨识结果的准确性, 也可能随着控制过程的进行, 被控过程的特性发生了一定的变化, 往往导致控制器性能下降<sup>[16,20,21]</sup>。因此, 控制算法被要求具有一定的鲁棒性, 在这里我们将察看模型病态性对于 MPC 算法鲁棒性的影响。

假定实际过程的模型在  $g_{11}$  中存在一个幅度为 20% 的模型失配, 其余参数都不存在失配, 其模型增益矩阵为

$$G_{process\_gain} = \begin{bmatrix} -10.1 & 9.84 \\ 9.84 & -6.88 \end{bmatrix}$$

同样给定两组输出设定点, 对其控制效果进行检查, 在这里为说明现象, 不对输入作硬性要求。

设定点 1:  $\Delta y = \begin{bmatrix} -1.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}$ , 权系数矩阵  $Q, R$  均

为 1, 其输入输出曲线如下图 3 所示:

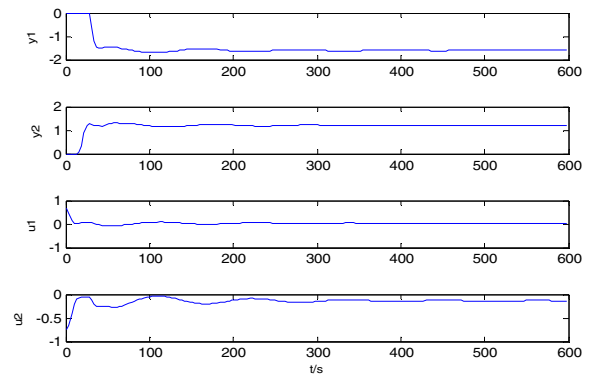


图 3 输入输出曲线: 第一组设定点

设定点 2:  $\Delta y = \begin{bmatrix} -1.6 \\ -1.2 \end{bmatrix}$ ,  $Q, R$  仍旧为 1, 其

输入输出曲线如图 4 所示:

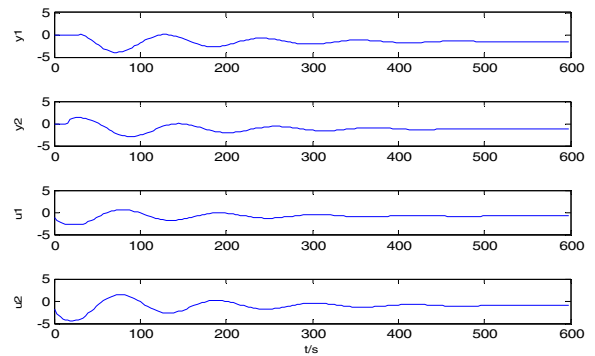


图 4 输入输出曲线: 第二组设定点

从图 3, 图 4 中可以看到, 过程发生了震荡, 且震荡的幅度同样与输出移动的方向有关。同时我们可以发现对于设定点  $\Delta y = \begin{bmatrix} -1.6 \\ -1.2 \end{bmatrix}$ , 其潜在对应的

输入稳态点为  $\Delta u = \begin{bmatrix} -2.2816 \\ -3.0888 \end{bmatrix}$ , 对于这组输入稳

态点, 实际过程模型对应的输出值为

$$\Delta y_{process} = G_{process\_gain} \times \Delta u = \begin{bmatrix} -7.3496 \\ -1.2 \end{bmatrix}$$

我们可以看到在  $g_{11}$  中 20% 的模型失配程度被放大为输出端的 359.35%, 而这是由控制输入的大动作引起的, 相当于控制器动作的幅度放大了模型的失配程度, 导致控制器对于模型失配变得非常敏感。

至此我们可以得出两个结论: 1. 模型的病态性会导致控制器的极端动作, 使得控制效果变差, 输出端易出现静差, 还会导致控制器的鲁棒性降低。

2. 模型的病态性对控制过程是否产生影响还与输出移动的方向性存在关系。

#### 4 原因分析

在这一节中，我们将对前一节中所观察到现象的原因进行分析。

我们观察到，对于存在病态性的模型，控制器是否产生大的动作与输出移动的方向存在关系。对于2输入2输出的方系统来说，由于给定了输出设定点，则潜在对应的输入稳态点是已经确定的。且输入设定点的求解，即是一个求解二元一次方程组的过程，在几何上的表现来说，其解是两条直线的交点。

对于第二节中给定的两组设定点，其求解过程在几何上的表现如下：对于输出初态 $[0 \ 0]^T$ ，

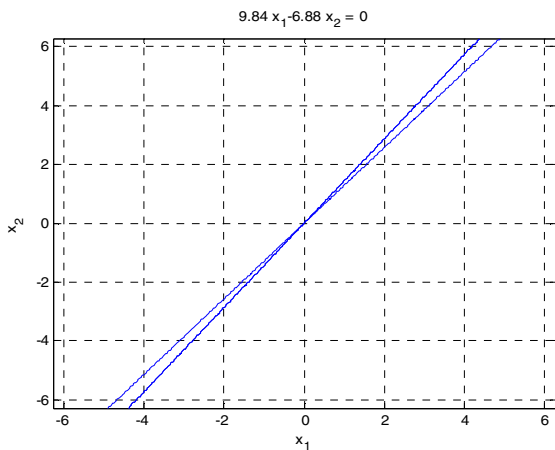


图5 输出初态几何展示

我们可以看到，两条直线的交点是原点，即输出初态对应的输入初态为 $[0 \ 0]^T$ 。

对于设定点是 $[-1.6 \ 1.2]^T$ 的情况，其几何上的表现为如图7所示：

我们可以看到两条直线的交点离原点很近，即对应的输入初态的幅值较小，因此控制器产生的动作不大。

而对于设定点是 $[-1.6 \ -1.2]^T$ 的情况，其几何上的表现如图7所示。我们可以看到，直线的交点离原点相较于第一组设定点更远，因此其控制器对应的幅度也很大，才会有我们观察到的大的控制器动作。

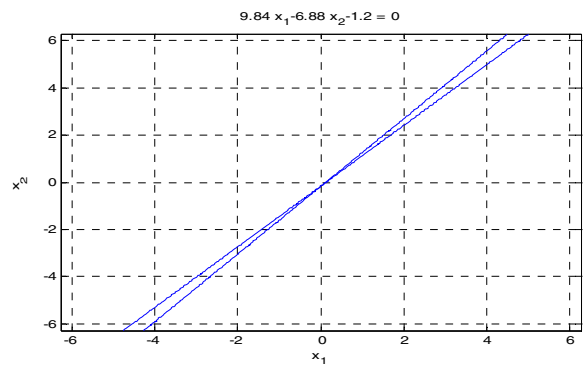


图6 第一组设定点几何展示

至此，我们应该很容易得出模型病态性对过程产生的影响是否与输出移动方向有关的原因。

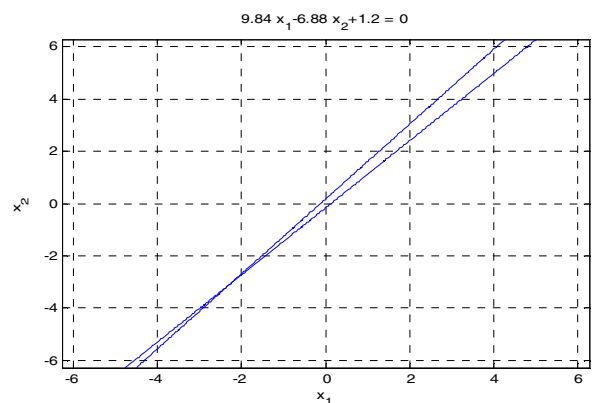


图7 第二组设定点几何展示

下面我们将利用线性代数工具：奇异值分解(SVD)对模型病态问题进行彻底的分析。

直观的判断一个模型是否病态的依据是查看该模型的条件数，而条件数

$$cond = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$$

其中 $\sigma$ 是矩阵的奇异值， $\sigma_{\max}$ 该矩阵最大的奇异值，相应的 $\sigma_{\min}$ 是矩阵最小的奇异值。

对于描述过程稳态关系的等式

$$\Delta y = G \Delta u$$

我们知道，从线性代数的角度来说，一个矩阵的乘法代表了一种线性变换，而线性变换的意义又可以有两种等价的解释：1. 将一个 $x \in R^{m \times 1}$ 的向量变换到 $R^{p \times 1}$ 的空间上。2. 提供了同一个向量在两个不同空间中的表示方式。从控制的上来说，将输出从一个初态移动到稳态等价于将输入从初态移动到对应的稳态，这两者在本质上是一致的。而奇异值分解，则提供了一种在结构上查看这种对应关系的可能。

$$G = U \Sigma V^T$$

若 $G \in R^{p \times m}$ ，则 $U = [u_1 \ \dots \ u_p]$ ， $U \in R^{p \times p}$ ，

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_p \end{bmatrix}, \Sigma \in R^{p \times m}$$

$$V = [v_1 \ \dots \ v_m], V \in R^{m \times m}$$

其中  $u_i$  与  $v_i$  一一对应, 且存在从  $u_i$  到  $v_i$  方向上大小为  $\sigma_i$  倍的拉伸。

对于本文中出现的控制器模型增益矩阵, 其奇异值分解结果如下:

$$U = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 20 & \\ & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

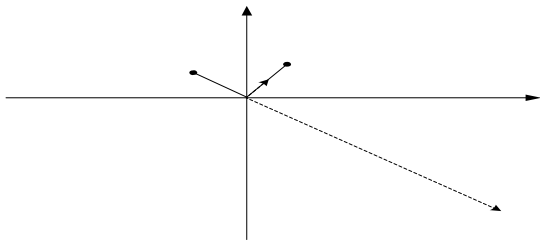


图8 奇异值分解基向量构成的坐标系

顶点是圆点的坐标系是以  $u_1, u_2$  为基向量构成的, 而顶点是箭头的虚线坐标系则是以  $v_1, v_2$  为基向量构成的。在  $u_1, u_2$  方向上拉伸的幅度分别是 20 倍与 0.5 倍, 这意味着在  $v_2$  方向上若存在移动的输出, 则在相应的  $u_2$  方向上需要有两倍幅值的输入动作, 而相较之下, 在  $u_1$  方向上仅需 0.05 倍的输入动作即可。

以前文仿真所用的两组设定点为例,  $\Delta y = \begin{bmatrix} -1.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}$

在  $v_1, v_2$  为基向量的坐标系中的坐标为  $(-2, 0)$ , 而

$\Delta y = \begin{bmatrix} -1.6 \\ -1.2 \end{bmatrix}$  的坐标则为  $(-0.56, -2)$ , 因此以

$\Delta y = \begin{bmatrix} -1.6 \\ -1.2 \end{bmatrix}$  作为设定点的情况, 控制器动作必

然要激烈的多, 前文的仿真也证明了这个分析。

## 5 消除病态模型的策略

从前文的仿真与分析中, 我们已经发现模型存在病态性的根本原因在于模型增益矩阵的最末奇异值偏小, 而解决的思路也很明确: 1. 使输出不会受模型病态性影响的方向移动, 即保证输出在最小奇异值对应向量方向上的投影幅值较小, 本质上来说引言中提到的在线策略均采用了这种思路。2. 修补

模型, 彻底降低模型的病态性。下面所给出的策略采用了第二种思路, 因此是一种离线的策略, 是在辨识工作结束, 将辨识模型配置为控制器模型前使用。

我们知道对于存在病态性的模型增益矩阵来说, 相较于病态问题, 模型增益系数的误差显得并不重要, 而且很有可能辨识所得到的模型本身就与过程的实际模型存在差异。因此, 我们提出一个模型修补策略, 即通过修改模型增益矩阵的值来增大最小奇异值, 降低模型的病态性<sup>[17,18]</sup>。方法如下:

1. 在得到辨识模型后, 以  $2 \times 2$  为最小规模对于原始模型子单元的病态性进行检验, 检验指标为给定的条件数。
2. 定义误差容忍因子  $\alpha$ , 表示每个模型增益系数允许改变的幅值大小。即  $|\Delta g_{ij}| \leq |g_{ij}| \times \alpha$ , 注意可以分别为某个指定的增益特别设定其误差允许因子, 也可所有的增益均采用统一的  $\alpha$ 。
3. 将最小奇异值  $\sigma_{\min}$  的初始值置为  $\sigma_{\max}$ , 采用二分法按照黄金分割进行迭代搜索, 找到误差允许范围内最大的  $\sigma_{\min}$  为止。
4. 更新模型。

我们设定误差容忍因子为 0.1, 应用上述方法修改模型, 修补后的模型为:

$$G' = \begin{bmatrix} -12.3783 & 10.1623 \\ 10.1623 & -6.4503 \end{bmatrix}$$

$$\Delta G = G' - G = \begin{bmatrix} 0.2417 & 0.3223 \\ 0.3223 & 0.4297 \end{bmatrix} \leq 0.1 \times G$$

将  $G'$  用于控制, 进行仿真验证查看模型存在失配的情况下控制的效果, 输出设定点为  $\Delta y = \begin{bmatrix} -1.6 \\ -1.2 \end{bmatrix}$ ,

$Q, R$  仍旧为 1, 其控制效果如下图所示:

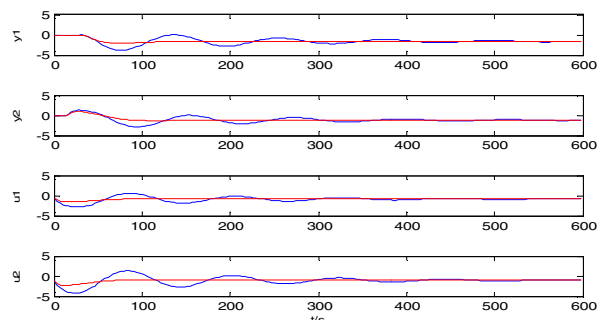


图9 模型修正后控制效果对比

蓝色与红色曲线代表采用修补前面后模型作为控制器模型的输入输出曲线, 我们可以看到, 在修补模型后, 过程的震荡幅度以及震荡时间大幅降低, 同时很快的达到了设定点, 证明了所给方法的有效性。

## 6 总结

文章分析了模型病态性对于控制可能产生的影响, 并利用几何与线性代数工具分析了模型病态问题的根本原因, 并提出了一种离线修补模型策略, 很好的消除了模型的病态性问题, 并用仿真验证了本文内包含的观点与结论。

## 参考文献(References)

- [1] Qin S J, Badgwell T A. An Overview of Industrial Model Predictive Control Technology[C]//AIChE Symposium Series. New York, NY: American Institute of Chemical Engineers, 1971-c2002., 1997, 93(316): 232-256.
- [2] Qin S J, Badgwell T A. A Survey of Industrial Model Predictive Control Technology[J]. Control engineering practice, 2003, 11(7): 733-764.
- [3] Cutler C R, Ramaker B L. Dynamic Matrix Control-A Computer Control Algorithm[C]//Proceedings of the joint automatic control conference. Piscataway, NJ: American Automatic Control Council, 1980, 1: Wp5-B.
- [4] Richalet J, Rault A, Testud J L, et al. Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Processes[J]. Automatica, 1978, 14(5): 413-428.
- [5] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tuffs, Generalized Predictive Control-Part I. The Basic Algorithm[J], Automatica, 1987,23(2):137-148.
- [6] Skogestad S, Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design[J]. New York, 1996.
- [7] Skogestad S, Morari M, Doyle J C. Robust Control of Ill-Conditioned Plants: High-Purity Distillation[J]. Automatic Control, IEEE Transactions on, 1988, 33(12): 1092-1105.
- [8] Grosdidier P, Froisy B, Hammann M. The Idcom-M Controller[C]//Proceedings of the 1988 IFAC workshop on model based process control. 1988: 31-36.
- [9] Marroquin J, Mitter S, Poggio T. Probabilistic Solution of Ill-Posed Problems in Computational Vision[J]. Journal of the American Statistical Association, 1987, 82(397): 76-89.
- [10] Cai J F, Candès E J, Shen Z. A Singular Value Thresholding Algorithm for Matrix Completion[J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4): 1956-1982.
- [11] Kassmann D E, Badgwell T A, Hawkins R B. Robust Steady-State Target Calculation for Model Predictive

- Control[J]. AIChE Journal, 2000, 46(5): 1007-1024.
- [12] Nikandrov A, Swartz C L E. Sensitivity Analysis of LP-MPC Cascade Control Systems[J]. Journal of Process Control, 2009, 19(1): 16-24.
- [13] Limebeer D J N, Kasenally E M, Perkins J D. On the Design of Robust Two Degree of Freedom Controllers[J]. Automatica, 1993, 29(1): 157-168.
- [14] Lin Wu-zhong. Singular Perturbation of Linear Algebraic Equations with Application to Stiff Equations[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1987, 8(6): 513-522.  
林武忠. 奇摄动线性代数方程组及其对病态方程的应用[J]. 应用数学和力学, 1987, 8(6): 513-522.
- [15] Wu Jun-liang, Liu Fei. Control Model of Ill-linear System and it Iterative Solution Method[J]. Control and Decision, 2004, 19(11): 1315-1317.  
伍俊良, 刘飞. 病态线性系统的控制模型设计及其迭代算法[J]. 控制与决策, 2004, 19(11): 1315-1317.
- [16] Chen Gui, Yang Jiang, Xie Lei, Zhang Rongjin. Research on Model-Plant Mismatch Detection Based on Subspace Approach[J]. CIESC Journal, 2011, 62(9):2575-2581.  
陈贵, 杨江, 谢磊等. 基于子空间方法的模型失配检测研究[J]. 化工学报, 2011, 62(9): 2575-2581.
- [17] Sanliturk K Y, Cakar O. Noise Elimination from Measured Frequency Response Functions[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2005, 19(3): 615-631.
- [18] James Hu S L, Bao X, Li H. Model Order Determination and Noise Removal for Modal Parameter Estimation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2010, 24(6): 1605-1620.
- [19] Zou Tao, Ding Bao-cang, Zhang Rui. MPC-An Introduction to Industrial Applications[J]. 2010.  
邹涛, 丁宝苍, 张端. 模型预测控制工程应用导论[J]. 2010.
- [20] Chen Ying, Cheng Zhen, Wen Shu-liang. Modified IMM Algorithm for Unmatched Dynamic Models[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(12): 2593-2597.  
陈映, 程臻, 文树梁. 适用于模型失配时的改进 IMM 算法[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(12): 2593-2597.
- [21] Harrison C A, Qin S J. Discriminating between Disturbance and Process Model Mismatch in Model Predictive Control[J]. Journal of Process Control, 2009, 19(10): 1610-1616.