

非惯性系下鳗鱼机器人动力学建模与仿真

张安翻^{1,2}, 李斌¹, 王明辉¹, 常建¹

(1. 中国科学院沈阳自动化研究所机器人学国家重点实验室, 辽宁 沈阳 110016

(2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 在惯性系下得到的鳗鱼机器人的动力学方程由于耦合度高、非线性强而不利于控制器的设计。本文受自主水下航行器(AUV)基于体坐标系的模型表示法的启发,定义了一个与鳗鱼机器人运动方向一致的非惯性系。在该非惯性系下,利用科里奥利定理获得鳗鱼机器人的二维运动学模型,并利用改进的牛顿第二定律和力矩平衡原理获得水下二维鳗鱼机器人在非惯性系下的动力学模型。所建立的动力学模型是解析的,可直接获得切向速度子动力学,更适合于基于模型的现代控制方案。与精确模型相比,本文所建立的动力学模型通过方向角参数解耦以达到了简化模型的目的。本文对一个9模块的机器人系统进行了数值仿真,并与已有的精确模型进行了对比分析,发现所建立简化模型和精确模型的几乎重合,从而验证了所建立简化模型的准确性。

关键词: 鳗鱼机器人; 牛顿-欧拉建模法; 非惯性系; 动力学模型

中图分类号: TG156

Modeling and Simulation of Eel Robots in the non-inertial Frame

ZHANG Anfan^{1,2}, LI Bin¹, WANG Minghui¹, CHANG Jian¹

(1. State Key Laboratory of Robotics, Shenyang Institute of Automation, Shenyang 110016, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: The obtained dynamic equations in inertial frame are highly coupled and fully nonlinear, thus those are not conducive to controller design. Inspired by Autonomous Underwater Vehicle (AUV) underwater modeling in non-inertia frame, this paper defines a non-inertial frame that is always aligned with the Eel robot. By using Coriolis' theorem, the kinematics model is derived. By using improved Newton's second law and the principle of moment balance, the dynamics equations are derived. The established dynamic model is analytical and the tangent velocity sub-dynamics can be obtained directly, which can be utilized in modern model-based control schemes. Compared with the existed model, the model established in this paper achieves the purpose of simplifying the model by decoupling orientation angle parameter. A nine module robot system is numerically simulated and compared with the existing exact model. It is found that the simplified model and the exact model almost coincide, which verifies the accuracy of the simplified model.

Key words: Eel-like robot; Newton-Euler modeling; Non-inertial frame; Dynamic model

自然界中,生物鳗鱼具有较高的游动效率,较强的灵活性。受生物鳗鱼启发,研究人员一直致力

于这种具有链式结构特征的机器人的样机研发和运动机理研究。鳗鱼机器人或者具有类似结构的无固定基座的链式结构机器人的物理样^[1]、运动学建模和动力学建模方法已经得到了广泛研究。Ostrowski等人^[2-3]应用微分几何方法建立机器人的动力学模

收稿日期: 2017-10-09

基金项目: 国家自然科学基金(61333016)

作者简介: 张安翻(1989-),博士研究生,研究方向为机器人控制、动力学建模, zhanganf@sia.cn

***通讯作者:** 张安翻, 博士, zhanganf@sia.cn

型,但其研究仅限于非完整运动学约束。McIsaac等^[4]运用几何方法研究了鳗鱼机器人的步态生成方法。牛顿-欧拉法也常用于建立机器人的动力学模型^[5-9]。此外,拉格朗日建模法^[10]、凯恩方法、连续体建模法^[11]也常用于建立机器人的动力学。所提出的动力学方程复杂,且具有高度耦合、非线性强的特征,而完全的非线性动力学方程和高度欠驱动特征使得控制器的设计变得更加困难,比如切向速度的跟踪控制。目前还没有切向速度子动力学模型,而且合适的简化动力学模型可以方便控制器设计。

在当前的模型简化方法中,一种是利用约束和拉格朗日力学的对称性简化模型^[3]。该方法并不适用于所有系统。一种是近似化简方法,通常采用泰勒级数展开,去掉高阶项。另一种简化方法完全不同于上述简化方法^[5,12-13]。Pal等定义了一个总是与机器人方向一致的新惯性坐标系 $t-n$ 。且将蛇形机器人的关节角转动量简化成了线性位移量。忽略了方向角的一阶、二阶微分 $\dot{\theta}_0 = 0, \ddot{\theta}_0 = 0$,并且未定义简化模型和精确模型的合适映射^[14],仅依靠经验给出方向角简化动力学方程^[5]。另外,自治水下机器人(AUV)平台通常有两种模型表示方式:基于刚体坐标系的表示和基于地球坐标系的表示^[15]。不同的坐标系表示方式意味着不同的刚体对称性参数约化。

鉴于上述原因,本文提出一种新的鳗鱼机器人动力学表示法:在非惯性系下建立鳗鱼机器人的动力学方程。本文定义了一个总是与鳗鱼机器人运动方向一致的非惯性系,该坐标系的坐标原点不在机器人质心处。本文在该非惯性系下,利用哥氏定理建立鳗鱼机器人的二维运动学模型,运用哥氏定理和修正的牛顿第二定律获得该非惯性系下得力平衡方程。将作用在每个杆上的流体作用力从惯性系转到非惯性系下得到非惯性系下的流体力模型,运用力矩平衡原理获得非惯性系下鳗鱼机器人的力矩平衡方程。从而将方向角从原来的动力学微分方程的系数项中分离以简化动力学模型。所建立的模型在数

学意义上建立了简化模型和精确模型的联系,将为证明简化模型^[5,12-13]的合理性提供理论支持。最后,对一个9模块的机器人系统进行了数值仿真,并将所建立模型与精确模型进行了对比,通过数值仿真验证了所建立模型的准确性

1 鳗鱼机器人的运动学参数定义

现有的蛇形机器人和鳗鱼机器人的动力学模型主要是基于惯性系。本文,运动方程将建立在一个特殊的非惯性系 $t-n$ 下。其中的一个优势是可以将方向角变量 θ_0 从原来的非线性运动方程的系数项中进行分离。本文仅考虑二维运动,假设鳗鱼机器人是浮力重力平衡的。假定机器人是有圆形截面的细长体,目前很多水下机器人的动力学模型都基于此假设。该动力学模型采用的流体力模型考虑了线性阻力、附加质量力效应、非线性阻力和流体力矩。

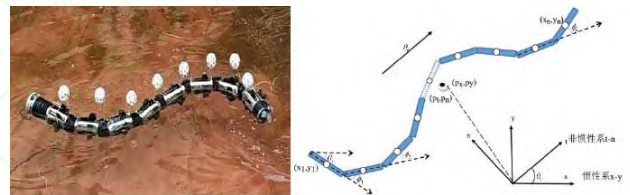


图1 n模块水下鳗鱼机器人及其运动学参数

表1 数学符号定义

变量名	含义
n	模块数
l	单模块长度的一半
m	单位模块的质量
$\theta_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i$	机器人的方向角
$J = \frac{1}{3} ml^2$	每个模块的转动惯量
$\phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]^T$	关节角向量
$\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n]^T$	关于世界坐标系下的绝对角向量
$\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_n]^T$	关于非惯性系 $t-n$ 的绝对角向量
$(p_x, p_y) \in R^2$	质心在全局坐标系下表示
$(p_t, p_n) \in R^2$	质心在非惯性系 $t-n$ 下表示

水下二维鳗鱼机器人的运动学参数见图1。平面鳗鱼机器人由 n 模块组成,关节数为 $n-1$ 。机器人分别定义在固定全局坐标系 $x-y$ 和非惯性系

$t-n$ 下, 这两种坐标系具有相同的坐标原点。坐标系的方向定义如下: t 轴沿着鳗鱼机器人的切向运动方向, n 轴与机器人切向运动方向的法向一致。另外, 坐标系 $x_i - y_i$ 分别固定在每个模块的质心处。 $\theta_0 \in R$ 定义为沿着关于全局坐标系的 x 轴旋转, 逆时针方向为正, 因此 x 轴和 t 轴的夹角为 θ_0 。相关数学符号定义见表 1。与本文相关的系数定义如下。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [\mathbf{I}_{n-1}, \mathbf{0}_{n-1}] + [\mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{I}_{n-1}], \\ \mathbf{e} &= [1 \dots 1]^T, \mathbf{D} = [\mathbf{I}_{n-1}, \mathbf{0}_{n-1}] - [\mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{I}_{n-1}] \\ \mathbf{V} &= \mathbf{A}^T (\mathbf{D}\mathbf{D}^T)^{-1} \mathbf{A}, \mathbf{J} = \mathbf{J}_n, \mathbf{K} = \mathbf{A}^T (\mathbf{D}\mathbf{D}^T)^{-1} \mathbf{D} \\ \sin \boldsymbol{\theta} &= [\sin \theta_1, \dots, \sin \theta_n]^T, \mathbf{S}_0 = \text{diag}(\sin(\boldsymbol{\theta})), \\ \cos \boldsymbol{\theta} &= [\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n]^T, \mathbf{C}_0 = \text{diag}(\cos(\boldsymbol{\theta})) \\ \mathbf{W}_c &= [\mathbf{B}_m, \mathbf{e}] = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{e}^T / n \end{bmatrix}^{-1}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{e} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_{2n \times 2n} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \mathbf{I}_{n,n} & \sin \theta_0 \mathbf{I}_{n,n} \\ -\sin \theta_0 \mathbf{I}_{n,n} & \cos \theta_0 \mathbf{I}_{n,n} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta} = \mathbf{W}_c \begin{bmatrix} \phi \\ \theta_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

利用等式 $\mathbf{K}\mathbf{e} = \mathbf{0}$, $\mathbf{D}\mathbf{e} = \mathbf{0}$, $\mathbf{D}\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}\mathbf{D}^T$ 和对称性、某些矩阵 (对角矩阵) 可交换来化简原非线性方程, 注意 $\mathbf{K}\mathbf{K}^T$ 的逆矩阵是不存在的。每个模块在世界坐标系下的速度变换到 $x_i - y_i$ 坐标系下表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{rx} \\ \mathbf{v}_{ry} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{S}_0 \\ -\mathbf{S}_0 & \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

首先, 从全局坐标系旋转到坐标系 $x_i - y_i$ 的旋转矩阵定义为

$$\mathbf{R}_{link,i}^{global} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

从全局坐标系旋转到 $t-n$ 坐标系的旋转矩阵定义为

$$\mathbf{R}_{nt}^{global} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中方向角 θ_0 , 从 $t-n$ 坐标系旋转到坐标系 $x_i - y_i$ 的旋转矩阵定义为

$$\mathbf{R}_{link,i}^{nt} = \begin{bmatrix} \cos \Phi_i & -\sin \Phi_i \\ \sin \Phi_i & \cos \Phi_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

上面的旋转矩阵有如下关系:

$$\mathbf{R}_{link,i}^{global} = \mathbf{R}_{link,i}^{nt} \mathbf{R}_{nt}^{global} \quad (6)$$

根据定义, 可知 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{e}\theta_0$ 和 $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{B}_m \phi$ 。

2 非惯性系下的鳗鱼机器人运动学

本文运用哥氏定理对鳗鱼机器人进行非惯性系下的运动学建模。

哥氏定理: 令 \mathbf{V} 是任意一个向量 (比如: 位置, 速度等), 该向量在固定坐标系 $x-y$ 和旋转坐标系 $t-n$ 中均可以改变, 那么在固定坐标系下的向量微分与在旋转坐标系下的向量微分有如下关系

$$\dot{\mathbf{V}}_{xy} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \dot{\mathbf{V}}_m + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \quad (7)$$

其中 $\dot{\mathbf{V}}_m$ 表示向量 \mathbf{V} 在旋转坐标系 $t-n$ 下的微分, 角速度为 $\boldsymbol{\Omega}$ 。

机器人分别定义在全局坐标系 $x-y$ 和非惯性系 $t-n$ 下, 鳗鱼机器人的运动学及相关符号见图 1。接下来给出机器人在两种不同的坐标系下质心位置的相互转换关系, 在 $t-n$ 坐标系下的质心位置 (p_t, p_n) 表示 (p_x, p_y) 的函数为

$$\begin{aligned} p_t &= p_x \cos \theta_0 + p_y \sin \theta_0, \\ p_n &= -p_x \sin \theta_0 + p_y \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (8)$$

在世界坐标系下模块的线速度 (\dot{p}_x, \dot{p}_y) 转换到

$t-n$ 坐标系下, 可写成如下形式

$$\begin{aligned} v_t &= \dot{p}_x \cos \theta_0 + \dot{p}_y \sin \theta_0, \\ v_n &= -\dot{p}_x \sin \theta_0 + \dot{p}_y \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (9)$$

对式(9)求逆, 得

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= v_t \cos \theta_0 - v_n \sin \theta_0, \\ \dot{p}_y &= v_t \sin \theta_0 + v_n \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (10)$$

根据哥氏定理, (v_t, v_n) 的关于时间的一阶导数为

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_t \\ \dot{v}_n \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{global}^{link,i} \begin{bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_n \dot{\theta}_0 \\ -v_t \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

对式(8)进行求导 (关于时间 t), 再带入式(9)对方程进行化简, 则 (p_t, p_n) 的一阶导数表示为

$$\dot{p}_t = v_t + p_n \dot{\theta}_0, \dot{p}_n = v_n - p_t \dot{\theta}_0, \quad (12)$$

其中 (\dot{p}_t, \dot{p}_n) 的绝对导是机器人在 $t-n$ 系下的质心速度。同理, 对方程(12)再次进行求导, 可以获得机器人质心在 $t-n$ 系下的加速度,

$$\begin{bmatrix} \ddot{p}_t \\ \ddot{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dot{\theta}_0 \dot{p}_n + p_n \dot{\theta}_0^2 + p_n \ddot{\theta}_0 \\ -2\dot{\theta}_0 \dot{p}_t + p_t \dot{\theta}_0^2 - p_t \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{global}^{link,i} \begin{bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \end{bmatrix} \quad (13)$$

不失一般性, 约束模块数为奇数。接下来利用模块的连接特性来建立各个模块的质心方程。在 $t-n$ 系下,

$$\mathbf{D}\mathbf{T} + l\mathbf{A} \cos \Phi = \mathbf{0}, \mathbf{D}\mathbf{N} + l\mathbf{A} \sin \Phi = \mathbf{0} \quad (14)$$

因此, 单个模块的质心位置可以表示为在 $t-n$ 系下的绝对角的函数,

$$\mathbf{T} = -l\mathbf{K}^T \cos \Phi + e\mathbf{p}_t, \mathbf{N} = -l\mathbf{K}^T \sin \Phi + e\mathbf{p}_n \quad (15)$$

对上式求导, 可得,

$$\dot{\mathbf{T}} = l\mathbf{K}^T \mathbf{S}_\Phi \dot{\Phi} + e\dot{\mathbf{p}}_t, \dot{\mathbf{N}} = -l\mathbf{K}^T \mathbf{C}_\Phi \dot{\Phi} + e\dot{\mathbf{p}}_n \quad (16)$$

再次对上式求导, 可获得在 $t-n$ 系下所有模块质心的加速度。

$$\ddot{\mathbf{T}} = l\mathbf{K}^T \mathbf{S}_\Phi \ddot{\Phi} + l\mathbf{K}^T \mathbf{C}_\Phi \dot{\Phi}^2 + e\ddot{\mathbf{p}}_t, \quad (17)$$

$$\ddot{\mathbf{N}} = -l\mathbf{K}^T \mathbf{C}_\Phi \ddot{\Phi} + l\mathbf{K}^T \mathbf{S}_\Phi \dot{\Phi}^2 + e\ddot{\mathbf{p}}_n$$

利用哥氏定理得到各个模块的速度在惯性系 $x-y$ 和非惯性 $t-n$ 的变换关系,

$$\mathbf{R}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{T}} - \dot{\theta}_0 \mathbf{N} \\ \dot{\mathbf{N}} - \dot{\theta}_0 \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中 $\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} & \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}^T$ 是所有模块在全局坐标系下的速度。

$$\mathbf{R}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}} \\ \ddot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{T}} - 2\dot{\theta}_0 \dot{\mathbf{N}} - \dot{\theta}_0^2 \mathbf{T} - \ddot{\theta}_0 \mathbf{N} \\ \ddot{\mathbf{N}} + 2\dot{\theta}_0 \dot{\mathbf{T}} - \dot{\theta}_0^2 \mathbf{N} + \ddot{\theta}_0 \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中向量 $\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}} & \ddot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}^T$ 是各模块在全局坐标系下的加速度。该变换的优势在于将方向角 θ_0 从原来的非线性微分方程的系数项中分离, 降低了方程的复杂性, 将有利利用控制器分析和设计。

3 非惯性系下的鳗鱼机器人动力学

本文采用解析牛顿-欧拉法建立水下鳗鱼机器人动力学模型, 假定水下鳗鱼机器人为细长体, 共有 $n+2$ 个运动自由度, 且横截面为圆形, 身体全部浸入水中。所提到的精确模型采用的是文^[14]的模型, 即力和力矩平衡方程在世界坐标系下可以表示

$$\begin{bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \end{bmatrix} = \frac{1}{nm} \mathbf{E}^T \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\theta} + \mathbf{W}_\theta \dot{\theta}_0 + \mathbf{K}_{Dx} \mathbf{f}_{Dx} + \mathbf{K}_{Dy} \mathbf{f}_{Dy} - \boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}^T \mathbf{u}$$

其中系数 $\mathbf{M}_0, \mathbf{W}_\theta, \mathbf{K}_{Dx}, \mathbf{K}_{Dy}$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{J} + ml^2 \mathbf{S}_0 \mathbf{V} \mathbf{S}_0 + ml^2 \mathbf{C}_0 \mathbf{V} \mathbf{C}_0 + u_n l^2 \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_1^T \mathbf{S}_0 + u_n l^2 \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^T \mathbf{C}_0, \\ \mathbf{W}_\theta &= ml^2 \mathbf{S}_0 \mathbf{V} \mathbf{C}_0 + ml^2 \mathbf{C}_0 \mathbf{V} \mathbf{S}_0 + u_n l^2 \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_1^T \mathbf{C}_0 - u_n l^2 \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^T \mathbf{S}_0 \\ \mathbf{A}_1 &= \mathbf{S}_0 \mathbf{K} \mathbf{S}_0^T + \mathbf{C}_0 \mathbf{K} \mathbf{C}_0^T, \mathbf{K}_{Dx} = u_n l^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{e} \mathbf{e}^T m_{11} - u_n l^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{e} \mathbf{e}^T m_{21} - l \mathbf{S}_0 \mathbf{K}, \\ \mathbf{K}_1 &= \mathbf{A}_1 + u_n \mathbf{A}_1 \mathbf{e} \mathbf{e}^T (m_{12} \mathbf{S}_0 \mathbf{C}_0 - m_{11} \mathbf{S}_0^2) - u_n \mathbf{A}_2 \mathbf{e} \mathbf{e}^T (m_{22} \mathbf{S}_0 \mathbf{C}_0 - m_{21} \mathbf{S}_0^2) \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{A}_2 - u_n \mathbf{A}_1 \mathbf{e} \mathbf{e}^T (m_{11} \mathbf{S}_0 \mathbf{C}_0 - m_{12} \mathbf{C}_0^2) + u_n \mathbf{A}_2 \mathbf{e} \mathbf{e}^T (m_{21} \mathbf{S}_0 \mathbf{C}_0 - m_{22} \mathbf{C}_0^2), \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{S}_0 \mathbf{K} \mathbf{S}_0 \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_0 \mathbf{K} \mathbf{C}_0^T, \mathbf{K}_{Dy} = u_n l^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{e} \mathbf{e}^T m_{12} - u_n l^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{e} \mathbf{e}^T m_{22} + l \mathbf{C}_0 \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (21)$$

由于 $\theta = \Phi + e\theta_0$, 因此方向角 θ_0 耦合在所有的系数矩阵 $\mathbf{M}_0, \mathbf{W}_\theta$ 中, 不利于方向角控制器的设计。流体力 $\begin{bmatrix} \mathbf{f}_x & \mathbf{f}_y \end{bmatrix}^T$ 作用在所有模块的质心处。关节力矩为 \mathbf{u} , 流体力矩 $\boldsymbol{\tau}$, 该精确模型^[14]将和本文所提出的模型进行对比仿真。在建立鳗鱼机器人在非惯性系下的动力学模型时, 需要确定机器人各个模块所受流体外力, 下面给出所有模块的水动力模型。

3.1 水动力建模

流体特征随雷诺数变化而变化。阻抗模型 (Resistance model) 适合于低雷诺数条件^[16], Lighthill^[17]的基于细长体理论的反作用力模型 (Reaction model) 适合高雷诺数条件, 基于 Jordan 方法的改进模型^[18]适合于中度雷诺数条件。鳗鱼机器人运动时的流体雷诺数约为 $10^4 \sim 10^5$ 。本文采用基于 Morison 方程的、解析流体力模型^[7]。该模型避免了对阻力效应的数值估计且解是封闭形式。

本文既考虑了线性阻力和附加质量力效应和流体力矩, 又考虑了非线性阻力和非线性阻力力矩。首先, 本文假设每个模块的截面均是圆形, 质量为 m , 转动惯量为 $ml^2/3$, 方向角为 θ_0 , 关节角向量为 $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}]^T$, 由于假定鳗鱼机器人在水平面运动, 本文只分析水平方向的力, 垂直方向的力合力为零, 左乘以矩阵 \mathbf{R}_{nt}^{global} , 施加在模块 i 质心处的力从在全局坐标系下变换到旋转坐标系 $t-n$ 下可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{r,i}^{nt,i} &= \mathbf{R}_{link,i}^{nt,i} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u_n \end{bmatrix} \mathbf{v}_{r,i}^{link,i} + \mathbf{R}_{link,i}^{nt,i} \begin{bmatrix} c_t & 0 \\ 0 & c_n \end{bmatrix} \mathbf{v}_{r,i}^{link,i} \\ &+ \mathbf{R}_{link,i}^{nt,i} \begin{bmatrix} c_t & 0 \\ 0 & c_n \end{bmatrix} * |\mathbf{v}_{r,i}^{link,i}| \mathbf{v}_{r,i}^{link,i} \end{aligned} \quad (22)$$

其中水动力相关系数分别为: 切向阻力系数 $c_t = \pi \rho C_f R l$, 法向阻力系数 $c_n = 2\pi \rho C_D R l$, 附加质

量诱导的系数 $u_n = 0.5\pi\rho C_a R^2 L$ 。所有模块在各自体坐标系下的速度 $(\mathbf{v}_{rx}, \mathbf{v}_{ry})$ 为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{rx} \\ \mathbf{v}_{ry} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\Phi & \mathbf{S}_\Phi \\ -\mathbf{S}_\Phi & \mathbf{C}_\Phi \end{bmatrix} (\mathbf{R}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}) \quad (23)$$

由附加质量力诱导的流体力从世界坐标系 $x-y$ 变换到非惯性系 $t-n$ ，代入方程(8)，方程(12)和方程(13)进行化简，得到由附加质量力诱导的流体力在 $t-n$ 系下的表达

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{A,t} \\ \mathbf{f}_{A,n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_n \mathbf{S}_\Phi^2 & -u_n \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi \\ -u_n \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi & u_n \mathbf{C}_\Phi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{T}} - 2\dot{\theta}_0 \dot{\mathbf{N}} - \dot{\theta}_0^2 \mathbf{T} - \ddot{\theta}_0 \mathbf{N} \\ \ddot{\mathbf{N}} + 2\dot{\theta}_0 \dot{\mathbf{T}} - \dot{\theta}_0^2 \mathbf{N} + \ddot{\theta}_0 \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (24)$$

阻力在 $t-n$ 系下可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{D,t} \\ \mathbf{f}_{D,n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_t \mathbf{C}_\Phi^2 + c_n \mathbf{S}_\Phi^2 & (c_t - c_n) \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi \\ (c_t - c_n) \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi & c_n \mathbf{C}_\Phi^2 + c_t \mathbf{S}_\Phi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{T}} - \dot{\theta}_0 \mathbf{N} \\ \dot{\mathbf{N}} - \dot{\theta}_0 \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (25)$$

其中向量 $(f_{D,t}, f_{D,n})$ 由线性阻力和非线性阻力诱导，表达在 $t-n$ 坐标系下。总的流体力可以写成如下矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_t \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{D,t} \\ \mathbf{f}_{D,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{A,t} \\ \mathbf{f}_{A,n} \end{bmatrix} \quad (26)$$

作用在所有模块的力矩采用的是文^[7]中的力矩模型，写成矩阵形式为，

$$\boldsymbol{\tau} = -\lambda_1 \ddot{\theta} - \lambda_2 \dot{\theta} - \lambda_3 \theta |\dot{\theta}|, \quad (27)$$

其中，附加质量诱导的力矩系数 $\lambda_1 = l^2 C_M m_a / 3$ ，流体阻力力矩系数 $\lambda_2 = 2\pi\rho C_D R l^4 / 3$ 和 $\lambda_3 = 0.5\pi\rho C_D R l^4$ 。 C_M 是附加的惯量系数。圆形截面的附加质量系数在 y 方向为 $m_a = \rho\pi R^2 2l$ 。

3.2 力和力矩平衡方程

要建立非惯性系下鳗鱼机器人的力平衡方程，可以先建立惯性系下的力平衡方程^[14]，再将该方程两边同时左乘以旋转矩阵，获得的方程如下

$$\mathbf{R}_{global}^{link,i} \begin{bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \mathbf{E} \mathbf{R}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \end{bmatrix} \quad (28)$$

其中

$$\mathbf{R}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix} \quad (29)$$

在非惯性系下，采用扩展的牛顿第二定律，增加了科里奥利、离心惯性力等项，将方程(13)，方程(24)和方程(25)插入方程(28)中，获得 $t-n$ 系下的加速度

表示

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_t \\ \dot{v}_n \end{bmatrix} = -\mathbf{M}_p \begin{bmatrix} u_n \mathbf{e}^T \mathbf{S}_\Phi^2 & -u_n \mathbf{e}^T \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi \\ -u_n \mathbf{e}^T \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi & u_n \mathbf{e}^T \mathbf{C}_\Phi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \mathbf{K}^T \mathbf{S}_\Phi \ddot{\theta} + l \mathbf{K}^T \mathbf{C}_\Phi \dot{\theta}^2 \\ -l \mathbf{K}^T \mathbf{C}_\Phi \ddot{\theta} + l \mathbf{K}^T \mathbf{S}_\Phi \dot{\theta}^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$+\mathbf{M}_p \begin{bmatrix} n \mathbf{e}^T \mathbf{f}_{D,t} \\ n \mathbf{e}^T \mathbf{f}_{D,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_n \dot{\theta}_0 \\ -v_t \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} nm + u_n \mathbf{e}^T \mathbf{S}_\Phi^2 & -u_n \mathbf{e}^T \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi \\ -u_n \mathbf{e}^T \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi & nm + u_n \mathbf{e}^T \mathbf{C}_\Phi^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (31)$$

所有模块的力矩平衡方程为

$$\mathbf{M}_\Phi \ddot{\theta} + \mathbf{W}_\Phi \dot{\theta}^2 + \mathbf{K}_{D,t} \mathbf{f}_{D,t} + \mathbf{K}_{D,n} \mathbf{f}_{D,n} - \boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}^T \mathbf{u} \quad (32)$$

其中系数 $\mathbf{M}_\Phi, \mathbf{W}_\Phi, \mathbf{K}_{D,t}, \mathbf{K}_{D,n}$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\Phi &= \mathbf{J} + ml^2 \mathbf{S}_\Phi \mathbf{V} \mathbf{S}_\Phi + ml^2 \mathbf{C}_\Phi \mathbf{V} \mathbf{C}_\Phi + u_n l^2 \mathbf{K}_1 \mathbf{K}^T \mathbf{S}_\Phi + u_n l^2 \mathbf{K}_1 \mathbf{K}^T \mathbf{C}_\Phi, \\ \mathbf{W}_\Phi &= ml^2 \mathbf{S}_\Phi \mathbf{V} \mathbf{C}_\Phi + ml^2 \mathbf{C}_\Phi \mathbf{V} \mathbf{S}_\Phi + u_n l^2 \mathbf{K}_1 \mathbf{K}^T \mathbf{C}_\Phi - u_n l^2 \mathbf{K}_2 \mathbf{K}^T \mathbf{S}_\Phi, \\ \mathbf{A}_1 &= \mathbf{S}_\Phi \mathbf{K} \mathbf{S}_\Phi^2 + \mathbf{C}_\Phi \mathbf{K} \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi, \mathbf{K}_{D,t} = u_n l^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{e}^T m_{11} - u_n l^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{e}^T m_{21} - l \mathbf{S}_\Phi \mathbf{K}, \\ \mathbf{K}_1 &= \mathbf{A}_1 + u_n \mathbf{A}_1 \mathbf{e} \mathbf{e}^T (m_{12} \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi - m_{11} \mathbf{S}_\Phi^2) - u_n \mathbf{A}_2 \mathbf{e} \mathbf{e}^T (m_{22} \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi - m_{21} \mathbf{S}_\Phi^2), \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{A}_2 - u_n \mathbf{A}_1 \mathbf{e} \mathbf{e}^T (m_{11} \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi - m_{12} \mathbf{C}_\Phi^2) + u_n \mathbf{A}_2 \mathbf{e} \mathbf{e}^T (m_{21} \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi - m_{22} \mathbf{C}_\Phi^2), \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{S}_\Phi \mathbf{K} \mathbf{S}_\Phi \mathbf{C}_\Phi + \mathbf{C}_\Phi \mathbf{K} \mathbf{C}_\Phi^2, \mathbf{K}_{D,n} = u_n l^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{e} \mathbf{e}^T m_{12} - u_n l^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{e} \mathbf{e}^T m_{22} + l \mathbf{C}_\Phi \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (33)$$

因此，鳗鱼机器人的运动方程由方程(30)和(32)给定，通过引入状态变量

$$\mathbf{x} = [\phi^T, \theta_0, p_x, p_y, \dot{\phi}^T, \dot{\theta}_0, v_t, v_n]^T \in R^{2n+4}$$

鳗鱼机器人的模型可以写成状态空间形式： $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 。

建立该动力学模型的目的是为了更方便后期设计合适控制器来实现任意可达的游动速度跟踪，所选取的切向速度状态量可以很好的评价机器人的前进速度。本文所提出的模型是解析的，更适用于多个模块数量机器人的仿真和实现。该模型成功将方向角 θ_0 从 $\mathbf{M}_\Phi, \mathbf{W}_\Phi$ 等系数项中分离出来。并且建立了简化模型和精确模型的函数映射关系，为进一步获得简化模型系数和精确模型系数之间的映射关系提供了依据。

4 数值仿真

为了验证本文所提出模型的准确性，这章节将所提出模型与已有的精确模型^[7]进行了数值仿真对比。仿真给出了前进运动和转弯两种运动情况下的两种模型的运动状态。

利用软件 Matlab 中的 ode45 计算动力学，实现了本文所建立模型的仿真实验。相对和绝对误差限

为 10^{-6} 。参考关节角输入设置为

$$\dot{\phi}_{ref,i} = \alpha \sin \omega t + (i-1)\beta + \gamma, i=1 \dots n-1, \quad (34)$$

其中参数 α 为步态幅值，关节正弦运动的角频率 ω ，步态的相位偏置 β ，步态的角度偏置 γ 。现有研究大多通过改变步态的角度偏置参数 γ 来实现转弯运动。本文也采用此方法实现转弯运动。

4.1 控制器设计

本章对关节动力学进行了关节角线性化控制器设计，设计的线性化控制器如下

$$\mathbf{u} = (\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21})\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \quad (35)$$

其中， $\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{W}_c^T (\mathbf{M}_\Phi + \lambda_1 \mathbf{I}_n) \mathbf{W}_c$ ，且

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{W}_\Phi \dot{\boldsymbol{\theta}}^2 + \mathbf{K}_{Df} \mathbf{f}_{Df} + \mathbf{K}_{Dn} \mathbf{f}_{Dn} \quad (36)$$

$$+ \lambda_2 (\dot{\boldsymbol{\Phi}} + \mathbf{e}\dot{\boldsymbol{\theta}}_0) + \lambda_3 (\dot{\boldsymbol{\Phi}} + \mathbf{e}\dot{\boldsymbol{\theta}}_0) \cdot |(\dot{\boldsymbol{\Phi}} + \mathbf{e}\dot{\boldsymbol{\theta}}_0)|,$$

为了确保关节角 ϕ 跟踪参考关节角信号 ϕ_{ref} ，根据如下控制率定义了新变量 $\bar{\mathbf{u}}$ ，

$$\bar{\mathbf{u}} = \ddot{\phi}_{ref} + \mathbf{K}_d (\dot{\phi}_{ref} - \dot{\phi}) + \mathbf{K}_p (\phi_{ref} - \phi) \quad (37)$$

其中 \mathbf{K}_p 和 \mathbf{K}_d 是正的控制增益，误差动力学方程为

$$\ddot{\phi}_{ref} - \ddot{\phi} + \mathbf{K}_d (\dot{\phi}_{ref} - \dot{\phi}) + \mathbf{K}_p (\phi_{ref} - \phi) = 0 \quad (38)$$

根据李雅普诺夫理论，很容易判断是系统在平衡点是指数稳定的。

4.2 仿真参数

为证明所提出模型的准确性，本文建立了 $n=9$ 模块的水下鳗鱼机器人仿真模型，单模块长度 $l=0.0626m$ ，半径 $r=0.0375m$ ，假设全部浸入水中，并且浮力重力平衡。流体相关参数设置如下^[8-9]：附加的惯量系数 $C_M=1$ ，粘滞阻力相关系数 $C_f=0.03$ ，形阻相关系数 $C_D=2$ ，附加质量相关系数 $C_a=1$ ，流体力矩相关系数分别为附加质量力矩系数 $\lambda_1=7.1905 \times 10^{-4}$ ，线性阻力力矩系数 $\lambda_2=0.0015$ ，非线性阻力力矩系数 $\lambda_3=7.1526 \times 10^{-5}$ ，法向阻力系数为 $c_n=9.3750$ ，切向阻力系数 $c_t=0.2209$ ，法向附加质量系数和切向附加质量系数分别设置为 $u_n=0.5522$ ， $u_t=0$ 。仿

真中的 PD 控制器的控制增益设计为 $K_p=200$ ， $K_d=100$ ，两种模型的所有的初始状态都设置为零。在同等参数设置的条件下，比较两种模型的数值仿真结果。

为同时验证前向运动和转向运动，角度偏置参数随时间变化如下

$$\gamma = \begin{cases} -0.01, & t \in [10, 20] \\ 0.01, & t \in [30, 40] \\ 0, & t \in [0, 10] \cup [40, 50] \end{cases} \quad (39)$$

4.3 动力学模型数值仿真验证

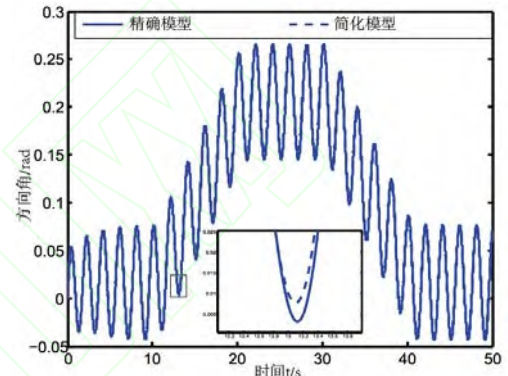


图 2 水下鳗鱼机器人的方向角

仿真设计机器人在 0~10 秒内进行前进运动，在 $t \in [10, 20]$ 和 $t \in [30, 40]$ 段内进行转弯运动。所有图中的实线代表精确模型仿真结果，虚线代表本文所提出非惯性系模型仿真结果。本文给出了两种模型的方向角、质心轨迹、质心速度在全局坐标系 x 轴和 y 轴的仿真结果。

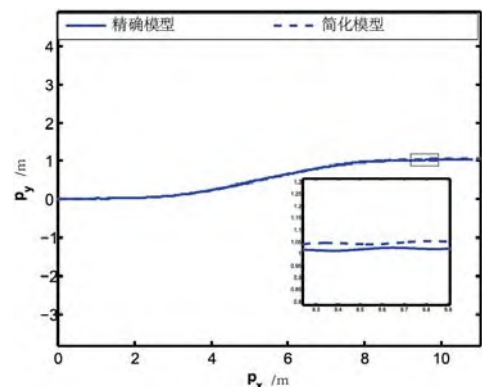


图 3 鳗鱼机器人在世界坐标系下的质心轨迹

首先本文为了验证所提模型的准确性，比较了本文所建立的非惯性系模型和精确模型的方向角变化情况（见图 2），仿真结果表明所提模型的方向角

几乎和精确模型的方向角变化一致。接下来给出了鳗鱼机器人在全局坐标系下的质心轨迹。如图 3 所示, 本文所提出的模型与精确模型的质心轨迹的几乎重合。

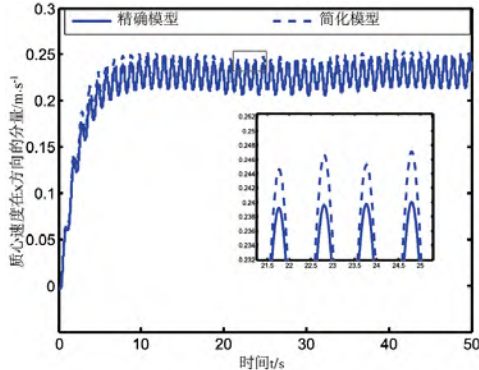


图 4 水下鳗鱼机器人在 x 方向的质心速度分量

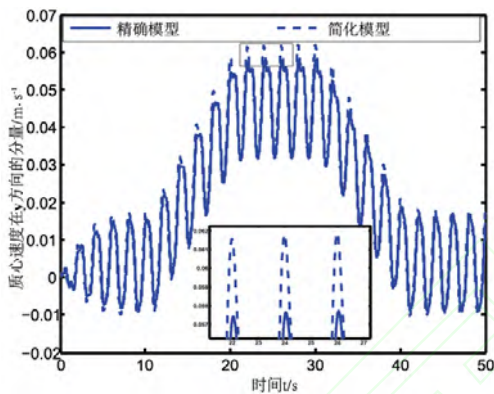


图 5 鳗鱼机器人质心在 y 方向的速度分量

图 4~5 分别为鳗鱼机器人在 x 方向和 y 方向的质心速度分量。仿真结果验证了所建立的动力学模型的质心在 x 和 y 方向的速度几乎与精确模型的质心速度重合。

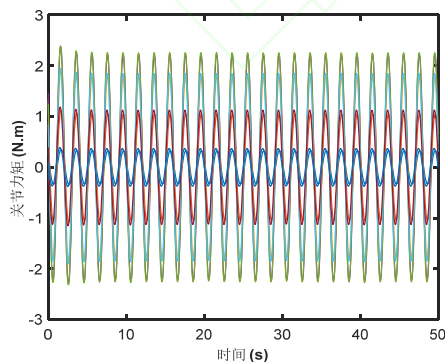


图 6 水下鳗鱼机器人的关节力矩

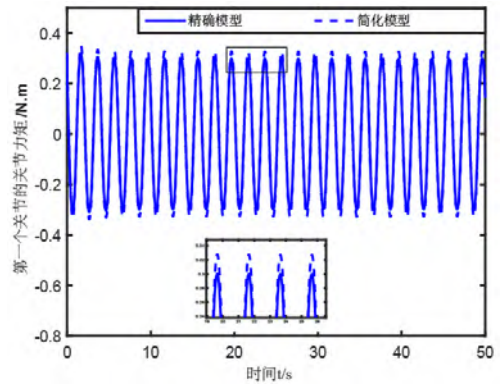


图 7 水下鳗鱼机器人第一个关节的关节力矩

最后本文给出了精确模型的所有关节的力矩信号(见图 6)。由于鳗鱼机器人杆数过多, 为了方便对比两种模型下的关节力矩, 本文仅给出其中一个关节的输出力矩对比, 其他的关节力矩信号与第一关节信号类似。由图 7 可知, 本文所提出的模型与精确模型的关节力矩的误差小。

综上所述, 所建立的非惯性系模型与精确模型几乎一致。验证了本文所建立的鳗鱼机器人在非惯性系下的动力学模型的准确性。

5 结论

本文受 AUV 的两种常用坐标系表示法和 Pal 的简化模型的启发, 定义了一个总是与鳗鱼机器人运动方向一致的非惯性系, 基于该非惯性系, 建立了的鳗鱼机器人动力学模型。采用了基于 Morsion 方程的流体力模型, 该流体力模型避免了阻力的数值估计并且解是解析的。与已有的精确动力学微分方程的系数含有方向角相比, 所建立的非线性微分运动方程的系数项中不再含有方向角, 从而实现了部分参数解耦, 简化了动力学模型。此外所建立的模型是解析的, 方便设计解析的控制器; 更适合于基于模型的控制方案, 可直接获得切向速度的子动力学, 方便后期设计合适控制器来实现任意可达的游动速度跟踪(所选取的切向速度状态量可以很好的评价鳗鱼机器人的前进速度)。本文采用数值仿真验证所提简化模型的准确性, 仿真结果表明所建立的非惯性系模型与精确模型几乎一致。下一步

将在此模型基础上设计基于切向速度子动力学模型的控制。

[参考文献]

- [1] Crespi A, Badertscher A, Guignard A, et al. AmphiBot I: an amphibious snake-like robot[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2005, 50(4): 163—175
- [2] Guo X. Modeling and Control of a Snake-like Robot Based on the Fiber Bundle Theory[D], Shenyang: Shenyang Institute of Automation Chinese Academy of Sciences, 2015.
- [3] Ostrowski J P, Burdick J W, Murray R M. The mechanics of undulatory locomotion: the mixed kinematic and dynamic case[C]// *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation 1998*, 1995, 2: 1945-1951.
- [4] McIsaac K A, Ostrowski J P. A geometric approach to gait generation for eel-like locomotion[C]// *Proceedings. 2000IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst. (IROS 2000)* (Cat.No.00CH37113), 2000, 3: 2230-2235
- [5] Liljebäck P, Pettersen K Y, Staudahl O, et al. A simplified model of planar snake robot locomotion[C]// *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on. IEEE*, 2010, 2868-2875.
- [6] Tanaka M, Matsuno F. Experimental study of redundant snake robot based on kinematic model[C]// *Robotics and Automation 2007 IEEE International Conference on. IEEE*, 2007: 2990-2995.
- [7] Kelasidi E, Pettersen K Y, Grasdahl J T, et al. Modeling of underwater snake robots[C]// *Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference on. IEEE*, 2014: 4540-4547.
- [8] Khalil W, Gallot G, Ibrahim O, et al. Dynamic modeling of a 3-D serial eel-like robot[C]// *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE*, 2005: 1270-1275.
- [9] Khalil W, Gallot G, Boyer F. Dynamic modeling and simulation of a 3-D serial eel-like robot[J]. *Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on*, 2007, 37(6): 1259-1268.
- [10] Melsaac K A, Ostrowski J P. A geometric approach to anguilliform locomotion: modelling of an underwater eel robot[C]// *Proc. 1999 IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (Cat.No.99CH36288C)*, vol. 4, no. May, pp. 2843-2848, 1999.
- [11] Chirikjian G S, Burdick J W. The kinematics of hyper-redundant robot locomotion[J]. *IEEE transactions on robotics and automation*, 1995, 11(6): 781-793.
- [12] Kelasidi E, Pettersen K Y, Grasdahl J T. A control-oriented model of underwater snake robots[C]// *in 2014 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, IEEE/ROBIO 2015*, 2015, pp. 753-760.
- [13] Kohl A M, Kelasidi E, Pettersen K Y, Grasdahl J T. A control-oriented model of underwater snake robots exposed to currents[C]// *in 2015 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, 2015, pp. 1585-1592.
- [14] Kelasidi E, Pettersen K Y, Grasdahl J T. A way-point guidance strategy for underwater snake robots[C]// *in 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2014, pp. 1512-1519.
- [15] Fossen T. *Guidance and Control of Ocean Vehicles*[M], University of Trondheim, Norway, 1999.
- [16] Taylor G. Analysis of the swimming of long and narrow animals[C]// *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1952, 214(1117): 158-183.
- [17] Lighthill M J. Large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion[C]// *Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences*, 1971, 179(1055): 125-138.
- [18] Wiens J A. *Gait optimization for a multilink anguilliform swimmer*[D]. Montreal: McGill University, 2012.