

一种基于线性模型的机器人手眼标定新方法

王 颖^{1,2} 董再励² 孙茂相¹ 徐进学¹

¹(沈阳工业大学 信息科学与工程学院 沈阳 110023)

²(中国科学院沈阳自动化研究所 机器人学重点实验室 沈阳 110015)

摘 要 针对基于传统手眼标定模型 $AX = XB$ 的标定问题,引入了由摄像机投影矩阵 M 构成的数学模型 $MY = M'YB$,并针对该模型提出了一种新解法.该方法运用矩阵直积和特征向量理论,将关于机器人手眼关系矩阵 X 的问题描述转换成关于关联矩阵 Y 的线性方程,运用最小二乘法求得线性闭解.该方法消除了传统方法多次分解摄像机传感器系统的内外参数而引入的摄像机传感器系统的固有误差和随机误差的影响.实验表明该方法可以提高手眼系统标定精度.

关键词 机器人手眼标定,矩阵直积,最小二乘法

中图分类号 TP24

A New Approach for Robot Hand-Eye Calibration Based on Linear Prototype

WANG Ying^{1,2}, DONG Zai-Li², SUN Mao-Xiang¹, XU Jin-Xue¹

¹(School of Information Science and Engineering, Shenyang University
of Technology, Shenyang 110023)

²(Robotics Laboratory, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences,
Shenyang 110015)

ABSTRACT

For the problem of hand-eye calibration based on the classic transform equation of the form $AX = XB$, the paper presents a new approach to robot hand-eye calibration based on the projection matrix M that yields a homogeneous transform equation of the form $MY = M'YB$. This approach transforms the problem of hand-eye matrix X into linear problems of relating matrix Y by integrating matrix direct-multiply with matrix singular value method and solves the hand-eye matrix by least-squares procedure. This method avoids the inherent errors and random errors of camera sensor system resulted from decomposition of the projection matrix M . Experimental results indicate that the proposed approach can improve the precision of hand-eye calibration system.

Key Words Robot Hand-Eye Calibration, Matrix Direct-Product Operation, Least-Squares Procedure

收稿日期:2004-09-24;修回日期:2005-03-11

作者简介 王颖,女,1980年生,硕士,主要研究方向为计算机视觉、图像处理与模式识别. E-mail: wangying_20@163.com. 董再励,男,1952年生,副研究员,主要研究方向为模式识别与人工智能、机器视觉、微机电系统、传感器系统. 孙茂相,男,1938年生,教授,主要研究方向为控制理论及应用、机器人规划与控制. 徐进学,男,1965年生,副教授,主要研究方向为过程控制、计算机控制.

1 引言

手眼标定是机器人学研究与应用中一个热点问题,是机器人基于视觉的自主行为规划与控制、主动视觉、视觉监控作业及机器人辅助 3D 测量与重构等科研与工程应用领域中的关键技术. 典型手眼系统一般将视觉传感器固定在机器人末端执行器或工具上. 当机器人系统作业时,视觉系统将作业局部的观测信息反馈到机器人控制系统,以实现在视觉信息指导下的行为控制与轨迹调整,从而使机器人具有一定自动作业能力、较好的鲁棒性和环境适应性. 这种基于手眼协调的自主(智能)作业能力对提高机器人作业能力和环境适应性具有特别重要的意义. 实现手眼协调作业的前提是要求确定视觉传感器与末端执行器坐标系的位姿关系. 确定视觉传感器与末端执行器坐标系间的位姿关系方法一般称之为手眼标定.

典型的机器人手眼标定模型为

$$AX = XB. \tag{1}$$

图 1 示意了 $AX = XB$ 问题的构成,其中, A 为摄像机坐标系在运动前后的位姿关系, B 为机器人末端执行器坐标系运动前后的位姿关系, X 为手眼间位姿关系. 由于 $AX = XB$ 的解的非线性和不稳定性,因此如何实现对 X 的有意义解的方法成为一直是机器人学研究关注的焦点之一.

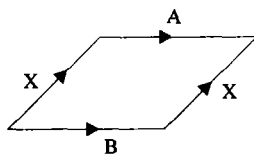


图 1 $AX = XB$ 问题示意图

Fig. 1 The sketch map of $AX = XB$

1989 年,Shiu^[1] 提出了对手眼矩阵的旋转和平移部分解耦的方法解决基于 $AX = XB$ 模型的手眼标定问题. 1991 年,Jack^[5] 提出采用四元数表示手眼转换矩阵的旋转部分. 1996 年,Ma^[4] 提出采用主动视觉利用相互正交的纯平移来线性化求解转换矩阵的旋转部分. 1999 年,Konstantinos^[6] 采用对偶四元数来表示空间的运动. 2001 年,Nicolas^[3] 提出利用矩阵直积理论将 $AX = XB$ 模型线性化,运用线性解法求解手眼矩阵 X .

传统针对 $AX = XB$ 模型的解法存在以下问题:

1、在解决基于模型的手眼标定问题时,传统解耦方法需要确切已知摄像机的内外参数. 在假定摄像机参数模型为针孔模型的前提下,摄像机参数矩阵 M 定义为

$$M_i = DA_i = \begin{bmatrix} \alpha_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \alpha_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_A^i & t_A^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中, D 为摄像机内参数, A 为摄像机外参数. 由于 M 为像机理想针孔模型的条件下定义,而实测数据都存在畸变、噪声、结构误差等影响,因此标定过程会引入许多参数误差.

2、施加不同的运动约束(如平移、转动等)来解耦手眼矩阵 X 将导致模型 $AX = XB$ 的解对机器人系统的绝对位姿精度有很高依赖性.

3、利用特殊的数学工具(如四元数、对偶四元数等)描述机器人手眼系统的空间运动,使得算法复杂,计算效率较低. 而 Nicolas 的线性解法由于减少了约束条件而存在不稳定性.

1995 年,Radu^[2] 提出了一种新的手眼标定模型 $MY = M'YB$. 采用单位四元数求出初值并利用非线性优化方法得出最终解. 该模型的求解不必多次分解摄像机内外参数,从而避免了分解投影矩阵 M 所引入的误差. 但 Radu 求解 $MY = M'YB$ 的非线性优化方法相对复杂.

本文利用 Radu 提出的 $MY = M'YB$ 模型,给出了一种新的解法. 该方法首先运用矩阵直积理论,利用关于 Y 的线性解与系数矩阵特征向量之间的关系,建立了关于机器人手眼关系矩阵 X 的转换矩阵 Y 的线性解表达方式,从而得到了 X 的线性解.

2 $AX = XB$ 问题的转化模型

2.1 $MY = M'YB$ 模型

为了避免由多次分解摄像机内外参数所引发的

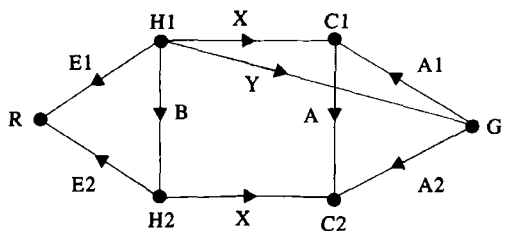


图 2 $MY = M'YB$ 模型中各坐标系关系示意图

Fig. 2 The Sketch map of relative coordinate transformations in the $MY = M'YB$ model

问题, Radu 在模型 $MY = M'YB$ 中直接利用了摄像机投影矩阵 M . 在这里引入关于手眼关系矩阵 X 的转换关系矩阵 Y , 如图 2 所示.

图 2 中, G 表示参考坐标系, C_1 和 C_2 分别表示摄像机在运动前后的空间位置, R 表示机器人基坐标系, H_1 和 H_2 分别表示机器人末端坐标系 H 运动前后的空间位置, Y 表示 H 与 G 之间的关系矩阵. 定义 A_1 和 A_2 分别为 G 与 C_1 和 C_2 间的关系矩阵, 定义 E_1 和 E_2 分别为机器人末端 H 从位置 1 与位置 2 的 H 与 R 之间的关系矩阵.

由机器人运动学可知, 设从 H 到 R 的关系矩阵是 E , 即

$$E = \begin{bmatrix} R_E & t_E \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则表达式 $A = TB$ 为

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \\ 1 \end{bmatrix}.$$

依据上述定义, 由图 2 可以看出

$$X = A_1 Y, \quad (3)$$

$$A = A_2 A_1^{-1}, \quad (4)$$

$$B = E_2^{-1} E_1. \quad (5)$$

将式(3)和式(4)同时代入式(1), 整理得 $A_2 Y = A_1 YB$, 等式两边同时左乘相机内参数矩阵 D , 则有 $M_2 Y = M_1 YB$. (6)

如果机器人带动摄像机在 n 个不同的位姿势上观测 G , 则可建立 $n-1$ 个方程组

$$\begin{cases} M_2 Y = M_1 YB \\ \vdots \\ M_i Y = M_1 YB_{i1} \\ \vdots \\ M_n Y = M_1 YB_{in} \end{cases}$$

其中, M_i 为摄像机在位置 i 处的投影矩阵, B_{i1} 为 H 在位置 1 与位置 i 之间关系矩阵. 该方程组的解即为转换关系矩阵 Y .

已知投影矩阵 M 可以看成是摄像机内外参数的函数, 即

$$M_i = \begin{bmatrix} \alpha_u r_{11}^i + \mu_0 r_{31}^i & \alpha_u r_{12}^i + \mu_0 r_{32}^i & \alpha_u r_{13}^i + \mu_0 r_{33}^i & \alpha_u t_x^i + \mu_0 t_z^i \\ \alpha_v r_{21}^i + \mu_0 r_{31}^i & \alpha_v r_{22}^i + \mu_0 r_{32}^i & \alpha_v r_{23}^i + \mu_0 r_{33}^i & \alpha_v t_y^i + \mu_0 t_z^i \\ r_{31}^i & r_{32}^i & r_{33}^i & t_z^i \end{bmatrix},$$

矩阵 M_i 记作 $M_i = [R_{M_i} \quad t_{M_i}]$. 这里, R_{M_i} 为 3×3 的矩阵, t_{M_i} 为 3 维向量. 由于向量 $(r_{11}^i \quad r_{21}^i \quad r_{31}^i)^T$,

$(r_{12}^i \quad r_{22}^i \quad r_{32}^i)^T, (r_{13}^i \quad r_{23}^i \quad r_{33}^i)^T$ 相互正交且 $\alpha_u \neq 0, \alpha_v \neq 0$, 所以 R_{M_i} 可逆. 已知矩阵 Y 的齐次矩阵可表示为

$$\begin{bmatrix} R_Y & t_Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

故可将式(6)改写成

$$R_{M_2} R_Y = R_{M_1} R_Y R_B, \quad (7)$$

$$R_{M_2} t_Y + t_{M_2} = R_{M_1} R_Y t_B + R_{M_1} t_Y + t_{M_1}. \quad (8)$$

令 $N = R_{M_1}^{-1} R_{M_2}$, 则式(7)和式(8)可写为

$$N R_Y = R_Y R_B, \quad (9)$$

$$(N - I) t_Y = R_Y t_B - t_N, \quad (10)$$

其中 $t_N = R_{M_1}^{-1} (t_{M_2} - t_{M_1})$.

已知矩阵 N 是两个旋转矩阵的乘积, 所以 N 本身也是个旋转矩阵, 且有 $N^{-1} = N^T$, 具体见文献[2]. 至此, 式(6)将 $AX = XB$ 模型中关于 X 的求解问题等效转化为 $MY = M'YB$ 模型中关于 Y 的求解问题, 其中, M 为观测值, B 可由 E 计算得到.

2.2 求解模型 $MY = M'YB$ 的线性算法

为了使 Y 的求解线性化, 本文运用了线性算子 vec 和矩阵直积算法. 令矩阵 Q, W 具有不同的维数 $m \times n$ 和 $o \times p$. vec 算子可将 $m \times n$ 矩阵的元素排列为一个长度为 mn 的矢量, 定义为

$$\text{vec}(Q) = (Q_{11}, \dots, Q_{1n}, Q_{21}, \dots, Q_{mn})^T,$$

则这两个矩阵 Q, W 的直积定义为一个 $mo \times np$ 的矩阵, 如

$$Q \otimes W = \begin{bmatrix} Q_{11} W & \dots & Q_{1n} W \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{m1} W & \dots & Q_{mn} W \end{bmatrix}.$$

由矩阵论知, 矩阵直积满足方程 $\text{vec}(CDE) = (C \otimes E^T) \text{vec}(D)$. 对式(9)和式(10)两边应用直积运算, 整理后得

$$(I_9 - N \otimes R_B) \text{vec}(R_Y) = 0, \quad (11)$$

$$(I_3 \otimes t_B^T) \text{vec}(R_Y) + (I_3 - N) t_Y = t_N. \quad (12)$$

要唯一确定 Y 的解, 至少需要两个不同的关系矩阵 B_{i1} 和 B_{j1} . 由此可以得到两组形如式(11)和式(12)的方程. 将两组式(11)方程组合有

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_9 - N_1 \otimes R_{B1} \\ I_9 - N_2 \otimes R_{B2} \end{bmatrix}}_C \text{vec}(R_Y) = 0_9,$$

其中, I_9 为 9 维单位向量, 0_9 为 9 维零向量. 由于旋转矩阵 R_Y 不为零, 则向量 $\text{vec}(R_Y)$ 也不为零. 由矩阵论知, 系数矩阵 C 至少有一个为 0 的奇异值, 且对应于奇异值 0 的特征向量与齐次方程的一个解相差一个比例因子. 对系数矩阵 C 进行奇异值分解, 得到的特征向量矩阵最右边一列的特征向量即为方程的

一个相差一常数因子的解. 令对应奇异值 0 的特征向量为 v , 与方程的解相差的比例因子为 λ , 把比例因子 λ 作为一个未知元素引入待求解的方程, 所以有

$$\begin{cases} Q_1 = (I_3 \otimes t_{B1}^T)v \\ Q_2 = (I_3 \otimes t_{B2}^T)v \end{cases} \quad \begin{cases} W_1 = I_3 - N_1 \\ W_2 = I_3 - N_2 \end{cases}$$

至此, 手眼标定问题就转化成对线性方程组 $Ax = b$ 的求解, 其中

$$A = \begin{bmatrix} Q_1 & W_1 \\ q_2 & W_2 \end{bmatrix}, \quad x = [\lambda \quad t_{Y1} \quad t_{Y2} \quad t_{Y3}]^T,$$

$$b = [t_{N1}^T \quad t_{N2}^T].$$

运用最小二乘法求解超定方程得

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b. \tag{13}$$

已知 $vec(R_Y) = \lambda v$, 重排就可以得到旋转矩阵 R_Y

$$R_Y = vec^{-1}(\lambda v),$$

由此可以求得矩阵 Y

$$Y = \begin{bmatrix} R_Y & t_Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

利用式(3) 就可以计算出手眼矩阵 X . 这样就完成了机器人手眼标定.

3 实验计算与误差分析

机器人手臂带动摄像机的两次运动分别为: 由位置 1 绕机器人基坐标系的 Z 轴旋转 5° 到达位置 2, 再绕 Y 轴旋转 6° 到达位置 3. 取两组运动为: 位置 1 到位置 2, 位置 1 到位置 3. 在上述三个位置处分别对摄像机进行标定, 得到投影矩阵 $M_i (i = 1, 2, 3)$, 并分解 M_i , 得到摄像机在位置 1 处的外参数 A_1 . 依据机器人控制器读数, 计算得到 $E_i (i = 1, 2, 3)$ 及两组运动中机器人末端执行器坐标系之间的变换矩阵 $B_{1i} (i = 2, 3)$ 分别为

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2721 & -14 & 248 & 15596 \\ 9 & 2749 & 256 & 10047 \\ 0 & 0 & 1 & 129 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 2707 & 229 & 283 & 10757 \\ -230 & 2748 & 157 & 4662 \\ 0 & 0 & 1 & 126 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 2718 & 272 & 1 & -12682 \\ -257 & 2745 & 158 & 5437 \\ 0 & 0 & 1 & 128 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9999 & -0.0061 & 0.0065 & -5.1572 \\ 0.0042 & 1.0004 & -0.0163 & -10.2257 \\ -0.0064 & 0.0139 & 0.9999 & 128.6251 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 30.56 \\ 0 & 0.999 & -0.035 & 46.28 \\ 0 & 0.035 & 0.999 & 38.46 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0.996 & -0.987 & 0 & 27.26 \\ 0.087 & 0.996 & 0 & 48.29 \\ 0 & 0 & 1 & 38.46 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0.991 & -0.087 & 0.104 & 31.74 \\ 0.087 & 0.996 & 0.009 & 48.30 \\ -0.105 & 0 & 0.995 & 34.85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{12} = E_2^{-1} E_1 = \begin{bmatrix} 0.996 & 0.087 & -0.003 & 3.114 \\ -0.087 & 0.996 & -0.035 & -2.299 \\ 0 & 0.035 & 0.999 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{13} = E_3^{-1} E_1 = \begin{bmatrix} 0.991 & 0.083 & -0.108 & -1.723 \\ -0.087 & 0.996 & -0.035 & -1.908 \\ 0.104 & 0.044 & 0.994 & 3.447 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

利用本文 2.2 节中给出的方法, 计算得到比例因子 $\lambda = -1.7321$, 对应系数矩阵 C 奇异值 0 的特征向量

$$v = [0.5773 \quad 0.0029 \quad -0.0044 \quad -0.0023 \quad 0.5674 \quad -0.1069 \quad 0.0038 \quad 0.1069 \quad 0.5674]^T,$$

平移向量 $t_Y = [15.7116 \quad 59.6466 \quad -29.3545]^T$. 由 $R_Y = vec^{-1}(\lambda v)$ 重排求得旋转矩阵 R_Y , 进而得到转换矩阵 Y , 分别为

$$R_Y = \begin{bmatrix} 0.999 & 0.0048 & -0.0075 \\ -0.0041 & 0.9826 & -0.1852 \\ 0.0065 & 0.1850 & 0.9826 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0.0048 & -0.0075 & 15.7116 \\ -0.0041 & 0.9826 & -0.1825 & 59.6466 \\ 0.0065 & 0.1850 & 0.9826 & -29.3545 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由 $X = A_1 Y$ 计算得 X 为

$$X = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0 & 0 & 9.9983 \\ 0 & 0.9800 & -0.1986 & 49.9886 \\ 0 & 0.1986 & 0.9800 & 100.0015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

表 1 转换关系矩阵 Y 的误差计算Table 1 Error calculation of transformation matrix Y

Y 计算误差	$\ M_i Y - M_i Y B_{1i}\ _F$	$\ N_{i-1} R_Y - R_Y R_{B_{1i}}\ _F$	$\ (N_{i-1} - I)t_Y - R_Y t_{B_{1i}} + t_{N_{i-1}}\ _F$
$i = 2$	$1.9663e-002$	0.028	0.031
$i = 3$	$1.8599e-002$	0.032	0.029

表 2 手眼关系矩阵 X 的误差计算Table 2 Error calculation of hand-eye transformation matrix X

X 计算误差	$\ A_i X - X B_{1i}\ _F$	$\ R_{A_{1i}} R_X - R_X R_{B_{1i}}\ _F$	$\ (R_{A_{1i}} - I)t_X - R_X t_{B_{1i}} + t_{A_{1i}}\ _F$
传统算法	0.246	0.238	0.227
本文算法	0.042	0.029	0.035

应用本文算法与传统解法分别求解 $MY = M'YB$ 模型和 $AX = XB$ 模型, 计算误差见表 1 和表 2. 从表中可以看出, 与传统方法相比, 本文算法对于求解手眼矩阵 X 具有更高的精度, 证明本算法是有效的.

4 结束语

本文基于 Radu 提出的机器人手眼标定模型 $MY = M'YB$, 提出了一种新的手眼标定方法, 利用线性算法将模型 $MY = M'YB$ 线性化, 运用最小二乘法求得线性解. 与传统方法相比, 本文算法有效解决了在求解传统模型 $AX = XB$ 过程中因多次分解摄像机内外参数而引入误差的问题, 避免了非线性优化方法中的不稳定性, 以及由使用四元数等特殊的数学工具所引发的计算复杂等问题, 简化了计算. 同时, 本文方法无需施加不同的运动约束(如平移、转动等)来解耦手眼矩阵 X , 在一定程度上减小了对机器人系统绝对位姿精度的依赖性. 为了保证有效解的唯一性, 本文算法要求机器人在两次运动中必须有旋转, 且两次旋转轴不平行. 利用本文算法可以有效解决在机器人作旋转平移运动情况下的手眼

标定问题, 实验结果表明, 本文算法较之传统方法具有更高精度. 但本文算法对于机器人作纯平移运动的情况并不适用.

参 考 文 献

- [1] Shiu Y C, Ahmad S. Calibration of Wrist-Mounted Robotic Sensors by Solving Homogeneous Transform Equations of the Form $AX=XB$. IEEE Trans on Robotics and Automation, 1989, 5 (1): 16-27
- [2] Chou J C K, Kamel M. Finding the Position and Orientation of a Sensor on a Robot Manipulator Using Quaternions. International Journal of Robotics Research, 1991, 10(3): 240-254
- [3] Ma S D. A Self-Calibration Technique for Vision System. IEEE Trans on Robotics and Automation, 1996, 12(1): 114-120
- [4] Konstantinos D. Hand-Eye Calibration Using Dual Quaternions. International Journal of Robotics Research, 1999, 18(3): 286-298
- [5] Andreff N, Horaud R, Espiau B. Robot Hand-Eye Calibration Using Structure-From-Motion. International Journal of Robotics and Research, 2001, 20(3): 228-248
- [6] Horaud R, Dormaika F. Hand-Eye Calibration. International Journal of Robotics Research, 1995, 14(3): 195-210