文章编号:1002-0411(2003)07-0686-06

旅行商问题典型算法的综合性能

苏丽杰[1,2,3], 聂义勇[1,2]
(1. 中国科学院沈阳自动化所,辽宁 沈阳 110016; 2. 中国科学院科院研究生院;
3. 东北大学理学院力学系, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要:本文对旅行商问题的各种典型算法进行了综述,介绍了各算法的思想及其发展,并给出它们的计算精度及计算复杂性,以此为基础,对算法的综合性能方面进行了比较,指出各算法存在的问题.同时,指出当前在这一领域的研究倾向.

关键词:旅行商问题; 松弛问题; 启发式算法; 计算复杂性
中图分类号:TP13 **文献标识码**:A

SYNTHETIC PERFORMANCE OF MAIN ALGORITHMS FOR THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM

SU Li-jie[1,2,3], NIE Yi-yong[1,2]
(1. *Shenyang Institute of Automation, CAS, Shenyang* 110016, *China*; 2. *Graduate School, CAS, Beijing, China*;
3. *Northeasten University, Shenyang* 110004, *China*)

Abstract: *This paper makes a survey of all kinds of algorithms for TSP (Traveling Salesman Problem), introduces their ideas and developments, and discusses their computational precision and computational complexity. Based on these, we compare some algorithms and give their shortcomings in synthetic performance. Some tendencies of current research on the topic are also pointed out.*

Keywords: *traveling salesman problem; relaxation problem; heuristics; computational complexity*

1 引言(Introduction)

旅行商问题(Traveling Salesman Problem, 即TSP)由来已久,它的历史可追溯到上个世纪20年代[1],经过了70多年的研究,虽然取得了很多进展,但直至今日,这个问题仍旧没有完全解决. TSP作为组合优化难题的典型代表描述起来很简单:给定n个城市及它们两两之间的距离,任务是寻求一条连接所有城市的最短回路(每个城市只访问一次,最终回到出发城市). 用图论语言描述为:给定图$G=[V,E]$及边长$d(e)(e\in E)$,寻求G的一个使边长之和最小的哈密尔顿圈[2]. 由于它在实际和理论上具有双重研究意义,对其求解算法的研究一直持续着.

TSP有多种变形,如非对称旅行商问题(ATSP)、多个旅行商问题(Multisalesmen Problem)、最短Hamilton路径问题等,它们都可以变换成TSP进行求解.

求解TSP的算法可分为:精确算法、近似算法、启发式算法. 精确算法目的在于求出最优解,包括完全枚举、动态规划,由于完全枚举算法的时间复杂性和动态规划算法的空间复杂性随着城市数目的指数倍增长,使得精确算法只能用来处理规模较小的TSP实例,这对于实际及理论研究都失去了意义. 因此,在TSP的求解过程中,近似算法和启发式算法占据着主要的位置. 近似算法就是求解原问题的松弛问题,从而得到最优解的一个下界,一般而言,一个问题的松弛问题要比原问题容易求解. 启发式算法则是直接从求解可行解入手,得到的是最优解的一个上界,这种算法对解的精度无保证. 求解TSP的策略就是分别求解它的上界和下界,如果它们一致,则得到最优解;通常情况下,两者是不相等的,这时候,以下界作为基准,来衡量上界的误差[3~5].

TSP算法的综合性能评价标准为:①算法的精度,即与最优解的偏差;②算法的复杂性,包括时间复杂性和空间复杂性,但主要指前者;③算法的鲁棒

收稿日期:2003-06-10

性,即它的适用范围;④算法的严密性,即它是否具有严格的或较为严格的推理论证.

下面从综合性能的角度对典型TSP算法进行分析比较,从而引出当前在这一领域的研究倾向.

2　算法综述(Survey of algorithms)

2.1　近似算法

TSP的整数规划数学模型如下[3]:

$$\min cx \quad \text{s.t.} \quad A_n x = 2 \tag{2.1}$$

$$x(\delta_n(S)) \geqslant 2k \quad \text{for all} \Phi \neq S \subset V \tag{2.2}$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{2.3}$$

$$x \quad \text{integer vector} \tag{2.4}$$

其中,c表示边长行向量;x是边相关向量,即若其分量所表示的边在回路中,分量值取1,否则取0;A_n是所有哈密尔顿圈的点边相关矩阵;$\delta_n(S)=\{e=[u,v]\in E \mid u\in S, v\in V\backslash S\}$,$x(F)=\sum_{e\in F}x(e)$,$k$为某一自然数,$\Phi$表示空集,$n$为节点集$V$的节点数.

TSP的松弛问题分为连续型松弛和离散型松弛,连续松弛包括线性规划(LP)松弛(又称子回路松弛)、分数2匹配松弛;离散松弛包括1棵树松弛、2匹配松弛、2近邻松弛、指派松弛和几何松弛[5].其中子回路松弛需要运用求解线性规划的方法进行求解,算法较为复杂,但可得到高质量的下界,这也是其被经常使用的原因;而离散型松弛则具有算法程序简单,计算结果质量不高的特性[3,5].下面详细介绍几种TSP的松弛问题.

2.1.1　线性松弛

松弛约束条件(2.4),便得到TSP的LP松弛模型,它的约束多面体称为子回路消去多面体.由于(2.1)-(2.3)的约束条件有n个等式和2^n-2+2m(m表示边数,即E的势)个不等式之多,这个松弛问题仍旧不能像一般的的线性规划问题一样直接求解,而需要使用一个迭代算法,求解其分离问题,即先取(2.1)、(2.3)及(2.2)的一小部分作为约束条件进行求解,得到一个解,然后判断这个解是否满足(2.2)中的全部约束,如果满足,则得到子回路消去多面体上的一个最优解;否则,将不满足的约束条件加到问题中,重新求解,如此反复求解.LP松弛问题能够在多项式时间内求解,但求解很费时间,对大规模问题的代价则更高.它的精度方面研究成果:Wolsey[1980][6]和Shmoys&Williamson[1990][7]证明了满足三角不等式的TSP的LP松弛下界与最优解的比值不小于2/3;Goemans[1993][8]曾猜想这个比值不小于3/4,对于它的证明还有待于对子回路消去多面体的深层研究.数值试验显示,对于许多TSP实例,LP松弛下界与最优解的比值都接近于1,尤其对于一些启发式算法失败的例子是如此.同时,LP松弛的鲁棒性和严密性是不容置疑的.

考虑到TSP的LP松弛的不唯一性(所有Hamiltonian圈的相关向量都满足TSP的LP一定数量的松弛条件,都是它的一个LP松弛.),加一些强条件(强有效不等式),以得到一个强LP松弛(即得到更好的下界).寻求定义约束多面体的有效不等式便成了如何得到一个好的强LP松弛的前提.目前所发现的有效不等式家族有子回路消去不等式、梳子不等式、系树不等式、PBW不等式、梯子不等式、皇冠不等式,以及由它们变形而得到的不等式[3].这方面的研究人员正努力发现其他新的或更具有普遍意义的有效不等式[9-14].

此外,在分离程序的实现方面仍然存在问题,即现在只能实现子回路消去不等式和2匹配约束的多项式时间精确分离程序,而其他的不等式约束只有启发式分离程序,这也是待解决的问题[3].

2.1.2　1棵树松弛和2匹配松弛

1棵树松弛为松弛掉每个节点回路次数为2的约束条件,这样可行解便为连通的n条边的生成子图.2匹配松弛则为松弛掉可行解连通的约束条件.由于这两种松弛问题得到的下界都不理想,需要对其进行改进.详细论述参考[15,16].

2.2　启发式算法

一般说来,启发式算法不像松弛算法那么严密,因此它的求解精度依靠松弛算法求得的下界.同时,对于TSP变体,启发式算法的鲁棒性较松弛算法差.但启发式算法的计算复杂性通常较低.

TSP的启发式算法有很多种,可分为:回路构造型、回路改善型、基于几何性质的算法及智能优化算法(包括遗传算法、人工神经网络、禁忌搜索、模拟退火等).

在下面的介绍中,算法的计算精度用算法求得的目标函数与最优解的目标函数的比值来表示.如果最优目标函数不知道,用松驰问题求得的下界来代替.

2.2.1　构造型启发式算法

根据一些构造法则确定一个哈密尔顿圈(一个可行解)的启发式算法称之为构造型启发式算法.它不再对所得到的解进行改善.

1) 最近邻算法

规则：从起点城市出发，下一个要访问的城市是待访问城市中最近的一个，如此循环构造．它的计算复杂性是 $O(n^2)$，计算精度是 $NN(I)\ OPT(I) \leq 0.5\cdot([\log_2 n]+1)$[17]．其中，$I$ 表示 TSP 的计算实例．

改进：双边近邻算法，候选子图算法．

评价：在算法的进行中，有一些点被“遗漏”了，最后的时候，不得不以高代价插入，影响其计算结果．此外，对初始点的选择很敏感．

2）贪婪算法

规则：由最短边开始，选择剩余的边中最短的，增加的边符合下列条件：不是已存在于回路中；增加它不会使某个城市的回路次数成为3；不会构成子回路．如此选择构造．计算复杂性是$O(n^2\log n)$，计算精度 $\mathrm{Greedy}(I)/\mathrm{OPT}(I) \leq 0.5([\log_2 n]+1)$[17,18]．

评价：与 NN 相比，计算时间稍长，计算精度稍好．

3）插入算法

规则：选择一个开始圈（k 个顶点上），根据一些选择准则，将其余点依次插入到圈中去．点的选择准则有：随机选择，插入到最可能好的位置；插入最小长度增长的点；所有到圈内点最短距离中最长的；到圈内点的距离最短[6]．该算法计算复杂性小于 $O(n^2\log n)$[3]．

评价：对初始点的选择不再那么敏感，但由于其 $O(n^2)$ 的空间复杂性，使得它不能用于大型 TSP 的求解．

4）CW 算法（Clarke-Wright savings）（Savings methods）[19]

规则：选择一个基点，做 $n-1$ 个子回路（剩余城市分别与基点相连构成的回路）；重复下面操作，直到只剩下一个回路：①对每一对子回路 T_1、T_2，计算节省值（通过删除两条它们与基点的连边，加上一条两开口的连线）；②合并两个提供最大节省值的子回路．

计算复杂性是 $O(n^2\log n)$，计算精度是 $CW(I)/OPT(I) \leq O[\log_2 n]+1$[18]．

评价：能够在较短的时间内得到较好的解[20]，比最近邻和插入算法稳定，它也存在着空间复杂性大的弱点．

5）CH 算法（Christofides）[21]

规则：构造一个最小生成树，在这个最小生成树的奇次节点上做一个最短长度的完美匹配，匹配连结最小生成树就得到了一个每个节点都是偶次的连通图．此图中一定包含一个 Euler 回路（即一个经过每条边只一次的图），则 TSP 路径（不长于 Euler 回路）可通过 Euler 回路构造，取捷径以避免重复访问节点[18]．

计算复杂性是 $O(n^{2.5})$（修正的 CH），计算精度是 $CH(I)/OPT(I) \leq 3/2$[22]．

评价：即便它的精度保证是有理论证明的，但是，计算最小生成树和最小权完美匹配很耗时，因此匹配过程经常使用启发式算法，这样就降低了计算结果的精度．

统计数值试验结果表明，在构造型启发式算法中，CW 算法的综合性能最好，平均误差在 10% 左右．如果只要求一个计算非常快的算法，可采用最近邻算法的改进型，即将被“遗漏”的点插入到回路中去；对于几何问题，最小生成树很容易得到，因此也可以采用改进的 CH 算法．

由构造型算法所得到 TSP 的解只能达到中等精度，一般情况下，不能满足精度要求．所以，需要进一步提高其精度，改善型启发式算法就被提出来了．

2.2.2 改善型启发式算法

改善型启发式算法就是改善由构造型算法得到的可行解，使其更接近最优解．改善型启发式算法包括近邻搜索算法．这里介绍的改善型算法由简单移动到复杂移动，其他形式的可参考文献[23]．

1）2-opt 交换[3,18]

基本思想：删除可行解中的两条边，以其他方式重新连接断开的两条路径，使得新的哈密尔顿圈比旧的哈密尔顿圈短．

评价：原始 2-opt 交换算法较耗时，可以采取一些措施降低它的时间复杂性，此外，它还可以与节点插入相结合．它的平均精度在 107% 左右．

2）3-opt 交换[3,18]

与 2-opt 类似，将已有回路断开三条边，然后重新连接，以求得到更好的解．

评价：3-opt 交换算法显然要比 2-opt 交换复杂，所以也存在着计算复杂性过高的问题，采取一些措施可以得到改善．它的平均精度可达到 104% 以下．

3）k-opt 交换（$k>3$）[3,18,24]

将已有回路断开 k 条边，然后重新连接成较好回路．但随着 k 的增长，计算复杂性增加得非常快，为 $O(n^k)$，因此只适用于小型问题．

4）Lin-Kernighan 算法[3,5,18,25]

基本思想：构造由简单移动所组成的复杂修改，这里，不是所有移动的目标都使可行解的长度减少．

LK 算法实际上是在改善的过程中 k 为变量的 k-opt 方法的有效实现.

评价:此方法被认为是将近 20 年内求解对称 TSP 的局部搜索算法中最有效、精度最高的算法. 缺点在于随着问题规模的升级,计算量增长过快. 目前 ILK(Iterated Lin-Kernighan)作为 LK 算法的升级版[18],被认为是最有效的算法,常被用来求解大型 TSP 实例.

5) 大近邻域搜索算法 (Very Large Scale Neighborhood Search Algorithm)[26-28]

设计近邻搜索算法关键的一点是近邻结构的选择,也就是近邻的定义. 这种选择很大程度上决定了解的精度. 经验的观点:近邻结构越大,局优解的质量越好,这也意味着最终得到高精度的解,但大邻域意味着搜索时间的加长,所以说,大邻域并不是产生有效启发式算法的必要条件,除非可以以一种有效方式进行搜索. 这里考虑的近邻的规模相对于输入数据的规模是很大的,并且以有效的方式进行搜索. 这些算法分为三类:第一,各种变宽度方法(k-opt)用于启发式搜索大型近邻结构;第二,利用网络流和动态规划的方法搜索近邻域;第三,通过约束原始问题推导出近邻结构,这样的近邻域可在多项式时间内求得. 如何有效地执行算法以及相关邻域的定义是正在研究的两个课题.

其他改善型算法,如节点、边插入、交叉删除等[5],由于节点、边插入算法搜索速度慢、交叉删除算法精度低,它们常被融入到其他复杂算法之中使用.

2.2.3 基于几何性质的启发式算法

从实际中得来的 TSP 实例常常带有几何本质,如空间位置、节点距离长度等,利用这些性质,可得到一些启发式算法. 这些算法适用于大型 TSP 实例.

1) 空间填充曲线算法(Space Filling Curve Heuristic)[3,5,29]

基本思想:将城市之间的道路变换成单位正方形(空间)内的曲线;再通过一个双向映射,将单位正方形内的这些曲线映射成单位区间上的线段;然后按一定规则挑选线段构成可行解.

算法:①用坐标比例变换将所有城市(点)变换到单位正方形内;②做双向映射 $\Psi:[0,1]\rightarrow[0,1]\times[0,1]$,它是满射并且可逆,即它实现了$[0,1]$与单位正方形之间点的一一对应,这样的映射存在,且能够用递归算法有效地表示出来;③对于每个城市依据其在单位正方形内的坐标做逆映射,得到 z_i,$z_i=\Psi^{-1}((x_i',y_i'))$,$i=1,2,\cdots,n$;④按升序排列 z_i;⑤根据 z_i 的大小依次连接各城市,最后最大的 z 值所对应的城市与最小的 z 所对应的城市相连.

计算复杂性小于 $O(n\log n)$,计算精度为 $O(\log n)$.

评价:对可行解的优劣还没有好的估计,即算法的精度不高,但计算时间短. 它的可行解不适于作为初始可行解.

2) 启发式算法

将问题区域按一定的规则划分为许多个小的区域,再由部分到整体地构成可行解[3,5].

条形 (strip heuristics):将问题区域划分为$\sqrt{n}$个平行或垂直的等宽度的条形[30]. 对于随机生成的问题很有用,但是对于实时的例子,计算结果较差.

部分 (segments, partitioning heuristic):将问题区域垂直地和水平地切割成小部分,每部分不多于一定的节点数[31].

节点减少(Node_Reduction):①计算包含所有点的长方形;②递归分割长方形成四个面积相等的小长方形,直到每个长方形中包含不超过一个点,或者 m 次回归分割后,每个长方形中包含不超过 k 个点;③用每个长方形的重心代表每个长方形;④计算一个通过所有代表点的哈密尔顿圈;⑤将原始点插入到圈中去,在相应代表点的前后最多判断 $l/2$ 个插入点,然后选择最好的插入点;⑥去掉代表点中所有非原始点[3,5].

评价:只适用于大规模问题;有失全局观念;如果将简单的分割与复杂启发式算法相结合,效果会更好,还有,对自然的分割算法还有待于研究[3].

此外,有一些算法用到凸多面体[3]及 Delaunay 图形[3,5]来计算,Delaunay 图形的应用还有待于进一步研究.

2.2.4 智能优化算法

20 世纪 80 年代以来,一些新颖的优化算法,如模拟退火、遗传算法、禁忌搜索、人工神经网络、混沌及其混合优化策略等,通过模拟或揭示某些自然现象(或过程)而得到发展,其思想和内容涉及数学、物理学、生物进化、人工智能、神经科学和统计力学等方面,为解决复杂问题提供了新的思路和手段. 由于这些算法构造的直观性和自然机理,通常称作智能优化算法,或称为现代启发式算法[32,33].

引人智能化算法的原因在于避免陷人局部最优解,希望得到更好的解上界.

1) 模拟退火算法(Simulated Annealing,简称SA)

SA应用于TSP取得了非常好的解,其缺点在于搜索速度慢,因此就出现了一些SA的改进算法. SA也经常与其他的局部搜索方法相结合,如LK算法等,取长补短,以取得更好的搜索速度和解质量[34].

2) 遗传算法(Genetic Algorithm,简称GA)

在求解TSP的过程中,GA存在的问题是收敛到局部最优解,而非全局最优解,以及收敛速度慢. 同样,它也经常被用来与其他方法相结合,以得到更好的算法.

3) 禁忌搜索算法(Taboo Search,简称TS)

禁忌搜索应用于TSP,其目的在于更细致地搜索局优解近邻[35,36],困难之处在于禁忌表的设计以及有效管理. 遗憾的是,TS在搜索速度和解的精度都无法与3-opt相比,因此,现在的一些研究人员将目标转向并行计算,到目前为止,还没有好的结论.

4) 人工神经网络(Artificial Neural Network,简称ANN)

ANN在求解TSP中获得了一定的成功[37,38],但无论从精度还是从计算时间上,ANN算法无法与经典算法相抗衡[18]. 因此,现在有很多工作是对神经网络的改造.

其他算法如蚁群算法、混合算法、各种算法的变异等,也对TSP的求解作了尝试.

2.3 分枝割平面算法(Branch and Cut)[3,39,40]

寻求TSP实例精确解的算法应该由三部分组成:寻求上界、下界及一个枚举方案;因为通常情况下,上界和下界是不相等的. 这类算法包括分枝定界算法和分枝割平面算法,它们的区别在于分枝定界算法的下界求解来自离散松弛,而分枝割平面算法的下界求解来自线性规划松弛. 由于在多面体理论方面所取得的成就,使得后者的性能超过了前者. 分枝割平面算法的主体包括:回路启发式算法(初始上界);Lagrange松弛(1棵树松弛的改进)(初始下界);基于线性规划的割平面程序;分枝定界. 其中,前两部分可以说成是前处理,它们的作用在于加速后两部分的运行;割平面程序部分的目的在于得到较好下界或建立起包含最优解的线性规划;分枝定界算法在于找到最优解或降低上界值.

3 结束语(Summary)

本文就解决TSP的算法进行了综述,并且按综合性能做了评价和比较,得出相关结论. 可以看出,围绕着这个问题,还有很多问题没有解决,包括理论的以及数值试验的. 此外,启发式算法的设计并不是一个简单的过程,在想法的基础上,需要设计出实际、有用的计算机代码,以及做足够多的数值试验. 所谓"多项式时间算法是有效的"这句话,在这里也将面临问题:对于大规模的TSP实例,可能时间计算复杂性也是不能接受的. 随着计算机硬件和数学理论的发展,希望不久的将来能够彻底攻克TSP这一难题.

参 考 文 献(References)

[1] Nigel C. OR topics: A brief history of TSP[EB/OL]. http://www.orsoc.org.uk/about/topic/news/tspjune.htm, 2000.

[2] 聂义勇,贾 刚,宋 翔. 整数规划基础[M]. 沈阳:东北大学出版社, 2001.

[3] Michael J, Gerhard R, Giovanni R. The traveling salesman problem [J]. Handbooks in OR&MS, 1995, 7: 225~330.

[4] Karla H, Manfred P. Traveling salesman problem[EB/OL]. http://iris.gmu.edu/~khoffman/papers/trav_salesman.html, 2002.

[5] Gerhard R. The Traveling Salesman Computational solutions for TSP Applications[J]. Lecture Notes in Computer Science, 1994, 840:1~223.

[6] Wolsey L A. Heuristic analysis, linear programming and branch and bound [J]. Math. Program. Study, 1980, 13:121~134.

[7] Shmoys M I, Williamson D P. Analyzing the Held-Karp TSP bound: A monotonicity property with application [J]. Inf. Process. Lett. 1990, 35: 281~285.

[8] Goemans M X. Worst-case comparison of valid inequalities for the TSP [J]. Math. Program, 1995:335~349.

[9] Maurras J F. Some results on the convex hull of Hamiltonian cycles of symmetric complete graphs[A]. Roy B. Combinatorial Programming: Methods and Applications [M]. Reidel, Dordrech, 1975. 179~190.

[10] Christof T, Michael J, Gerhard R. A complete description of the traveling salesman polytopes on 8 nodes [J]. Oper. Res. Lett., 1991, 10: 497~500.

[11] Padberg M W. On the symmetric traveling salesman problem: a computational study [J]. Math. Program. Studies, 1980, 12: 78~107.

[12] Fleischmann B. A new class of cutting planes for the symmetric Traveling Salesman Problem [J]. Math. Program., 1988, 40: 225~246.

[13] Fleischmann B, Cutting planes for the Symmetric Traveling Salesman Problem [R]. Universit Hamburg, 1987.

[14] Naddef D. The binested inequalities for symmetric traveling salesman polytope [J]. Math. Oper. Res., 1992, 17: 882~900.

[15] Held M. The traveling salesman problem and minimum spanning trees [J]. Oper. Res., 1970, 18:1138~1162.

[16] Nemhauser G L. Integer and Combinatorial Optimization [M].

Chichester: John Wiley&Sons, 1988.

[17] 陈志平,徐宗本. 计算机数学 [M]. 北京:科学出版社,2001.

[18] David S J, Lyle A M. The Traveling Salesman Problem: A Case Study in Local Optimization [R]. 1995.

[19] Potvin J Y. Enhancements to the Clarke and Wright algorithm for the Traveling Salesman Problem [R]. University of Montreal, 1990.

[20] Arthur J L. A computational study of tour construction procedures for the traveling salesman problem [R]. Corvallis: Oregon State University, 1985.

[21] Christofides N. Worst Case Analysis of A New Heuristics for the Traveling Salesman Problem[R]. Pittsburgh: Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, 1976.

[22] Gabow H N, Tarjan R E. Fast scaling algorithms for general graph-matching problems [J]. J. Assoc. Comput. Mach., 1991, 38: 815 ~ 853.

[23] Gendreau M. New insertion and postoptimization procedures for the traveling salesman problem [J]. Oper. Res., 1992, 40: 1086 ~ 1094.

[24] Margot F. Quick updates for p-OPT TSP heuristics [J]. Oper. Res. Lett., 1992, 11:45 ~ 46.

[25] Mak K T. A modified Lin-Kernighan traveling salesman heuristic [J]. Oper. Res. Lett., 1993, 13:127 ~ 132.

[26] Ravindra K A, Ozlem E, James B O, *et al*. A Survey of Very Large Scale Neighborhood Search Techniques [R]. USA: University of Florida, 1999.

[27] Gregory G. Exponential neighborhood local search for the traveling salesman problem [J]. Computers & Operations Research, 1999, 26: 313 ~ 320.

[28] Vladimir G D, Gerhard J W. A study of exponential neighborhoods for the Traveling Salesman Problem and for the Quadratic Assignment Problem [J]. Math. Program., 2000, Ser. A 87: 519 ~ 542.

[29] Bartholdi J J, Platzman L K. An O(NlogN) planar Traveling Salesman heuristic based on spacefilling curves [J]. Oper. Res. Lett., 1982, 1(4):121 ~ 125.

[30] John D L. An improved solution to the Traveling Salesman Problem with thousands of nodes [J]. Communications of the ACM, 1984, 27 (12):1227 ~ 1236.

[31] Richard M K. Probabilistic analysis of partitioning algorithm for the Traveling-Salesman Problem in the plane [J]. Mathematics of Operations Research, 1977, 2(3): 209 ~ 224.

[32] 王　凌. 智能优化算法及其应用 [M]. 北京:清华大学出版社,施普林格出版社,2001.

[33] Nirwan A, Edwin H. 李　军, 边肇祺. 用于最优化的计算智能 [M]. 北京:清华大学出版社,1999.

[34] Basu V. Comparison of various approaches to solving Traveling Salesman Problem [A]. Symbolic Representations and Reasoning [C]. 1998. http://www. lips. utexas. edu/ ~ scott/ta/project9/TSPReport. htm.

[35] Glover F. Tabu search [J]. ORSA J. Comput. 1990, 1: 190 ~ 206 (Part I). 2: 4 ~ 32 (Part II).

[36] Knox J, Glover F. Comparative Testing of Traveling Salesman heuristics derived from Tabu Search, Genetic Algorithms and Simulated Annealing [R]. Center for Applied Artificial Intelligence, Univ. of Colorado, 1989.

[37] Durbin R, Willshaw D. An analogue approach to the traveling salesman problem using an elastic net method [J]. Nature, 1987, 326: 689 ~ 691.

[38] Hopfield J J, Tank D W. Neural computation of decisions in optimization problems [J]. Biol. Cybern., 1985, 52: 141 ~ 152.

[39] Martin G, Olaf H. Solution of large-scale symmetric traveling salesman problem [J]. Mathematical Programming, 1991, 51: 141 ~ 202.

[40] David A, Robert B, William C. On the Solution of Traveling Salesman Problems[R]. USA: Rice University, 1998. CRPC-Tr 98744.

作者简介

苏丽杰(1974 -),女,博士研究生. 主要研究方向为组合优化问题.

聂义勇(1939 -),男,研究员, 博士生导师. 主要研究方向为 CAE,计算数学,整数规划等