

基于李代数参数化的射影变形目标跟踪*

李广伟^{1,3,4} 尹健² 史泽林¹ 刘云鹏^{1,4}

(1 中国科学院沈阳自动化研究所 光电信息研究室 沈阳 110016;

2 空军装备研究院总体所 北京 100076;

3 青岛大学管理科学与工程系 青岛 266071;

4 中国科学院研究生院 北京 100039)

摘要 基于空间变换模型的目标跟踪问题常归结为非线性最小二乘优化问题,射影变换模型的高度非线性使得基于向量空间的优化算法倍显局限。通过李代数参数化将正则射影变换群局部线性化,在内蕴几何优化理论的框架下,提出一种射影变形目标跟踪算法。与基于向量空间的矩阵参数化的跟踪算法作对比实验,结果证实本文算法的可行性和高效性。

关键词 射影变换 目标跟踪 几何优化 李群 李代数 指数映射

Projective Target Tracking Based on Lie Algebra Parameterization

Li Guangwei^{1,3,4} Yin Jian² Shi Zelin¹ Liu Yunpeng^{1,4}

(1 Shenyang Institute of Automation, the Chinese Academy of Sciences Shenyang 110016 China;

2 The Research Institute on General Development and Argumentation of Equipment of Air Force Beijing 100076 China;

3 Management Science and Engineering Department of Qingdao University Qingdao 266071 China;

4 Graduate School of the Chinese Academy of Sciences Beijing 100039 China)

Abstract Target tracking based on the space transformation model can usually be solved by dealing with another nonlinear least square optimization problem. The geometric optimization algorithm based on the vector space has more limitations for high nonlinearities of the projective transformation. The exponential mapping between the Lie group and its Lie algebra can make us to utilize the manifold structure to propose a more efficient projective target tracking method within the intrinsic geometric optimization framework. Our comparative experiments with the tracking algorithm based on matrix parameterization on the vector space validate the feasibility and higher effectiveness of the method based on the Lie algebra parameterization.

Key words projective transformation target tracking geometric optimization Lie Groups Lie algebra exponential mapping

1 引言

目标跟踪是计算机视觉、模式识别和机器人等领域的研究热点^[1]。其中,引人关注的理论和技术难题之一是如何处理跟踪目标的几何形变。当目标背景表面与摄像机距离足够远,或目标透射变换不明显时,采用仿射模型近似几何形变,可以取得满意的效果。但在许多特殊的应用中,譬如,图形学中的图像拼接¹;军事领域中的无人机视觉制导等,

必须要考虑透射变换。对视觉制导而言,当无人机捕获目标后,为获得最佳攻击角度,经常要在航向和高度上作大范围调整,以提高攻击精度。高机动

引起目标图像非线性失真,如仍采用直线弹道下目标跟踪原理,用仿射变换描述目标运动,虽然计算简单,但已不能保证无人攻击机稳定跟踪目标。

射影变换精确地模型化了在摄像机或物体运动后,同一物体的图像之间的关系,能够刻画仿射变换所不能描述的摄像机的横向和纵向抖动^[2]。射影变换模型有八个独立参数;变换自身具有高度非

*基金项目:中国科学院国防科技创新基金项目(CXJJ-665)

线性；各参数变化对目标函数的敏感度差异很大，这些因素客观上影响了稳定、精确的目标跟踪算法的设计。由于连续视频可以看作变换群作用于模板而生成的轨道，当跟踪一个目标时，如果假定目标的辨识保持不变，所有目标的外观的改变，纯粹是由于传感器方向的改变、照明的改变和目标移动等，则跟踪问题简化为寻找场景中的不变描述或计算空间变换参数。

Hager 通过间接调换模板和输入图像的角色，基于矩阵参数化，采用向量空间逆向加和迭代算法，解决基于仿射模型的跟踪问题^[3]。文献[4]将其扩展至射影变换模型（本文称之为 Vector—GN 算法）。然而，基于向量空间的方法，由于没有充分利用射影变换参数的李群结构，给进一步改善跟踪算法的性能提供了空间。

基于流形上的几何优化算法始于 20 世纪七、八十年代，是一种新型的求解约束优化问题的方法，其核心思想是将约束集视为流形，将传统的约束优化问题转化为流形上的无约束优化问题。近年来人们把这种算法应用于不同的流形解决不同的问题。特别是基于李群的优化算法^[5]已成功地应用于信号处理、计算机视觉、模式识别等领域^[6]。美国学者 Grenander 提出普适模式理论（General Pattern Theory），其中的变形模板思想^[7]认为，目标的所有变化是由基准模板经变换群作用生成的李群轨道，从而将目标识别和跟踪问题转化为李群流形上的参数优化问题。

目标跟踪中所涉及的空间变换通常具有李群结构，利用李群和李代数之间的指数映射，使优化过程中参数的迭代求解能在参数的真实空间中进行，可进一步提高算法的性能，由此建立更高效的跟踪算法。

2 基于李群指数映射的几何优化

李代数参数化是通过李群指数映射实现的。基于李群指数映射的几何优化是本文跟踪算法的理论基础。

2.1 李群指数映射

赋予群以光滑流形结构得到李群，其群运算记为 \circ 。李群 M 在单位元 e 处的切空间记为 $T_e M$ ；过 e 点的 X 的积分曲线是单参数子群，记为 $\gamma_X(t)$ ；赋予李括号运算后的 $(T_e M, [\cdot, \cdot])$ 为 M 的李代数，记

作 $\Lambda(M)$ 。设 $X \in T_e M$ 。

定义 1 李群指数映射：

$$\exp: \Lambda(M) \times R \rightarrow M$$

$$(X, t) \rightarrow \exp(tX) = \gamma_X(t). \text{ 特别地 } \exp(X) = \gamma_X(1).$$

引理 1^[8] 李群 M 的李代数 $\Lambda(M)$ 内一定存在一个包含 0 的开凸集 W ，使得李群指数映射 \exp 是从 W 到 M 的开核 U 的一个微分同胚。

行列式为 1 的 3 阶实矩阵构成的李群称为特殊线性群，即 $SL(3, R)$ ，其李代数 $sl(3, R)$ 是所有矩阵迹为零的 3 阶实矩阵集合。 $sl(3, R)$ 的基向量为

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & e_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ e_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & e_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ e_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & e_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ e_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & e_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对于矩阵李群，群运算是矩阵乘法；李代数乘法（李括号运算）为 $[A, B] = AB - BA$ ；李群指数映射可按普通意义上的矩阵指数计算

$$\exp tA = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \quad (1)$$

2.2 几何优化算法框架

将李群嵌入到欧氏空间构成子流形，李群上的优化问题成为经典的受限优化问题，本文采用几何优化方法，充分利用李群流形内在的几何结构，将受限优化问题变为无约束优化问题。

设 $e_i (i=1, \dots, n)$ 是李代数 $\Lambda(M)$ 的基向量，由李群指数映射和引理 1 知，若设 t 是李群 M 上一点， x 是 t 邻域内一点，则存在 $\omega = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in \Lambda(M)$ ，使得

$$x = t \circ \exp(\omega) = t \circ \exp\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) \quad (2)$$

其中， $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ 。

设 $\varphi(\cdot)$ 是定义在李群 M 上的函数，则其在 t 点的泰勒展开式为

$$\varphi(t \circ \exp(\omega)) = \varphi(t) + J_t^p \cdot v + \frac{1}{2} v^T H_t^p v + O(\|v\|^3) \quad (3)$$

其中, $[J_t^p]_i = \frac{\partial}{\partial v_i} \varphi(t \circ \exp(\omega))|_{v=0}$,

$$[H_t^p]_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \varphi(t \circ \exp(\omega))|_{v=0}.$$

类比欧氏空间优化算法, 可构造各种内蕴优化算法。比如, 经典的 Newton-Raphson 方法采用如下内蕴迭代

$$t \leftarrow t \circ \exp(\omega) \quad (4)$$

其中 v 可由方程 $H_t^p v = -[J_t^p]^T \varphi(t)$ 解得。

3 基于李代数参数化的射影目标跟踪

3.1 问题描述

假定跟踪的目标具有平坦表面, 当目标在三维空间运动时, 前后目标成像可用射影变换描述。将射影变换群正则化, 使其行列式值为单位 1, 得到特殊线性群 $SL(3, R)$ 。

设 p 的齐次坐标为 $(x, y, 1)^T$, $SL(3, R)$ 在欧氏空间的嵌入映射为 $\pi: t \rightarrow \pi(t)$, 对于任意 $t \in SL(3, R)$, 定义从 $SL(3, R)$ 到 p 的作用为 $w: SL(3, R) \times p \rightarrow p$, 则射影变换可表示为

$$w(\pi(t))(p) = \frac{1}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{21}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

把第一帧图像中选定的包含目标的矩形区域作为初始模板, 其灰度值为 $I(p)$, 目标经过射影变形后在输入图像中的灰度值为 $I(w(t)(p))$, 在灰度恒常性假设前提下, 通过求解优化问题

$$\arg, \min \|I(w(\pi(t))(p)) - I(p)\|^2 \quad (6)$$

得到射影变换参数, 确定目标在当前图像中的位置, 在连续视频中重复上述处理过程, 达到跟踪目的。

这里, 射影变换参数的求取实际上是 $SL(3, R)$ 优化问题。基于李代数参数化, 即令参数增量 $\omega = \sum_{i=1}^8 v_i e_i$, $v = (v_1, \dots, v_8)^T$, 则非线性最小二乘优化问题 (6) 变为

$$\begin{aligned} & \arg, \min \|I \circ t \circ \exp(\omega)(p) - I(p)\|^2 \\ & = \arg, \min \left\| I \circ t \circ \exp\left(\sum_{i=1}^8 v_i e_i\right)(p) - I(p) \right\|^2 \end{aligned} \quad (7)$$

3.2 最优射影变换参数的求解

若记 $f_p(t \circ \exp(\omega)) = I \circ t \circ \exp(\omega)(p) - I(p)$

则由 (3) 可得

$$\begin{aligned} & \|f_p(t \circ \exp(\omega))\|^2 \\ & \approx \|I \circ t(p) - I(p) + J_t^{f_p}|_{v=0} v + O(\|v\|^2)\|^2 \end{aligned} \quad (8)$$

其中雅克比矩阵 $J_t^{f_p}(0)$ 为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial I \circ t \circ \exp\left(\sum_{i=1}^8 v_i e_i\right)}{\partial v^T} \Big|_{v=0} \\ & = \frac{\partial I \circ t(q)}{\partial q^T} \Big|_{q=p} \cdot \frac{\partial w(t, p)}{\partial t^T} \Big|_{t=\pi(t)} \\ & \cdot \left[\frac{\partial \pi(\exp(\sum_{i=1}^8 v_i e_i))}{\partial v_1} \Big|_{v_i=0} \dots \frac{\partial \pi(\exp(\sum_{i=1}^8 v_i e_i))}{\partial v_8} \Big|_{v_i=0} \right] \\ & = \nabla_p^T (I \circ t) \frac{\partial w(t, p)}{\partial t^T} \Big|_{t=\pi(t)} \cdot [\pi(e_1) \dots \pi(e_8)] \\ & = \nabla_p^T (I \circ t) J^{w, p} e_x \end{aligned} \quad (9)$$

对于 $J_t^{f_p}(0)$ 每行而言, $[\nabla_p^T (I \circ t)]_{1 \times 3}$ 表示投影变形后图像的空域导数; $[J^{w, p}]_{3 \times 9}$ 表示射影变换 (5) 的雅可比矩阵; $[e_x]_{9 \times 8}$ 是 e_i 按行拉直形成的列向量 $\pi(e_i)$ 构成的雅可比矩阵。 $J^{w, p}$ 和 e_x 是定值, 可离线计算。于是

$$v_i^* = (J_t^{f_p})^+ (I \circ t(p) - I(p)) \quad (10)$$

此处 $(J_t^{f_p})^+$ 表示 $J_t^{f_p}$ 的伪逆, 于是迭代公式为

$$t = t \circ \exp\left(\sum_{i=1}^8 \lambda_i v_i e_i\right) \quad (11)$$

其中, λ_i 为可调步长。

3.3 跟踪流程

基于李代数参数化的射影目标跟踪过程如下: 离线计算

$$(5) \text{ 计算 } J^{w, p} = \frac{\partial w(t, p)}{\partial t^T} \text{ 和 } e(\pi) = [\pi(e_1) \dots \pi(e_8)]$$

(1) 初始化: 在第一帧中确定模板 $I(p)$, 计算变

- 换参数初始值 t ；读入新图像
 迭代过程：
 (2) 根据前次迭代所得的参数 t ，在新图像中获取准目标图像 $I \circ t(p)$
 (3) 计算差值图像 $I \circ t(p) - I(p)$
 (4) 计算准目标的梯度 $\nabla_p^T(I \circ t)$
 (6) 计算雅可比图像 $J_t^T = \nabla_p^T(I \circ t) J^T e_x$
 (7) 根据 (10) 计算参数增量 v
 (8) 选择合适的 λ ，更新参数： $t \leftarrow t \circ \exp(\lambda v)$
 (9) 若 $\|v\|$ 大于预先指定的正数或迭代次数小于预定值，返回(2)

下一帧：
 (10) 读入下一帧图像返回(2)，若无下一帧，跟踪结束。

4 试验

为验证本文算法的可行性和有效性，把本文 Lie-Algebra 算法和文献[4]的 Vector-GN 算法进行试验对比。算法用 Matlab 语言编写，试验在处理器为 PIV 2.4G HZ、内存为 512M 的微机上完成。

试验 1：用图 1 作为输入图像，在图像中心选择 100×100 的图像作为模板，如图 2 所示。对模板进行 1000 次随机射影变形，以变形后的数据来测试算法。首先用变形数据对四个角点的坐标进行扰动，扰动的标准差 σ 从 1 个像素到 10 个像素增长。对每个标准差 σ ，试验 100 次，经过 15 次迭代后模板和输入图像之间的 RMS(root-mean-square) 误差小于 3 时，认为算法收敛。统计数据如图 3(a) 所示，横坐标表示扰动标准差，纵坐标表示平均收敛率，可以看出，当坐标的扰动小于 3 个像素时，两种算法的平均收敛率几乎一致；随着 σ 的增长，Vector-GN 算法的平均收敛率快速下降。当 $\sigma=10$ 时，Vector-GN 算法的平均收敛率只有 30%，Lie-algebra 算法收敛率为 50%。对于 $\sigma=6$ 的 100 次试验，统计所有的试验数据，如图 3(b) 所示，横坐标表示收敛的迭代次数，纵坐标表示 RMS，本文算法平均经过 9 次迭代就收敛，而 Vector-GN 算法需要 14 次。

试验 2：图像序列共 100 帧，图像大小为 512×480 ，模板尺寸为 52×40 。要跟踪的目标为房屋

的窗户，目标区发生了较大的投影变换。图 4 给出了两种算法的部分跟踪结果。可以看出：图像序列在第 80 帧以后变形较大，Vector-GN 算法不能收敛，跟踪框发生异常，滑出跟踪区。本文算法对目标区进行了稳定的跟踪。Vector-GN 算法、Lie-Algebra 算法收敛的平均迭代次数分别为 7 次、5 次。

从实验 1 理想模型的图像配准试验结果和试验 2 的实时目标跟踪结果可以看出，本文 Lie-Algebra 算法的效率和精度均高于 Vector-GN 算法，这和理论的期望是一致的：参数的迭代在其真实空间里进行，保证了图像配准和目标跟踪的高效性。



图 1 输入图像

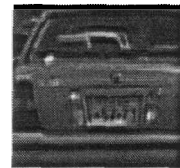
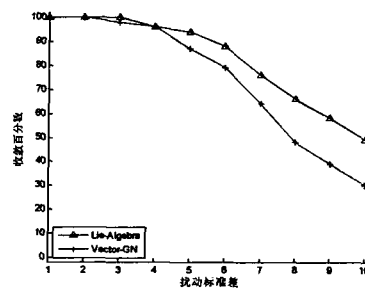
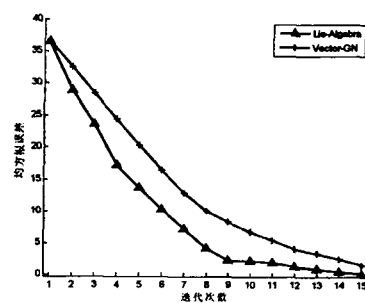


图 2 模板



(a) 平均收敛率



(b) 平均收敛速度

图 3 试验 1 中两种算法的平均收敛率和平均收敛速度的比较

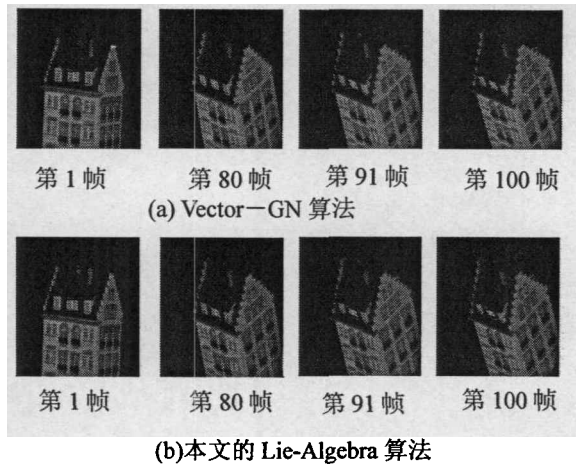


图4 试验2中两种算法的部分跟踪结果

5 结论

用微分几何的思想、方法,处理信号领域和计算机视觉领域中的实际问题,是一个引人注目的研究方向。本文基于李代数参数化,充分利用射影变换参数的李群结构,提出了更高效的射影几何变形目标跟踪算法。对比试验说明,与基于向量空间的优化算法相比,基于李代数参数化的跟踪算法在跟踪稳定性和速度方面均有较大提高,这对于实际应用有重要的参考价值。必须指出的是,本文的基于李代数参数化的优化算法是一种局部线性化算法,如果初始值和迭代步长等选择不当,算法易发散,跟踪易发生漂移,对此必须进行深入研究。

参考文献

- [1] Trucco, E. Plakas. K. Video Tracking: A Concise Survey [J]. IEEE Trans on Oceanic Engineering, 2006, 31(2): 520-529.
- [2] S. Mann, R.W. Picard. Video orbits of the projective group: A simple approach to featureless estimation of parameters [J]. IEEE Trans on Image Processing, 1997, 6(9):1281-1295.
- [3] G.D. Hager, P.N. Belhumeur. Efficient region tracking with parametric models of geometry and illumination [J]. IEEE Trans on Pattern Anal. and Machine Intell., 1998, 20(10):1025-1039.
- [4] J.M. Buenaposada, L. Baumela. Real-time tracking and estimation of plane pose [A]. 16th International Conference on Pattern Recognition[C], Quebec, Canada: IEEE Computer Society Press, 2002, 2: 697-700.
- [5] B. Owren, and B. Welfert. The Newton Iterations on Lie Groups [J], 2000, 40(1): 121-145.
- [6] Pie Yean Lee. Geometric Optimization for Computer Vision, PhD Thesis, Australian National University, Canberra, 2005.
- [7] U. Grenander, M. I. Miller, and A. Srivastava. Hilbert-Schmidt lower bounds for estimators on matrix lie groups for ATR[J]. IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell., 1998, 20(8): 790-802.
- [8] S B.C. Hall. Lie Groups, Lie algebras, and Representations: an Elementary Introduction [M]. New York: Springer, 2003.